

## MODULAZIONE DI FASE E DI FREQUENZA

Entrambe sono casi particolari della modulazione d'angolo, per cui:

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} \quad \text{ed} \quad s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)]$$

per la modulazione di fase  $\theta(t) = D_f m(t)$ , in cui  $D_f$  rappresenta la sensibilità di fase del modulatore [rad/V]; per la FM si ha:  $\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma$  con  $D_f$  detta deviazione di frequenza [rad/sV].

Confrontando le due espressioni si capisce che un segnale modulato in fase lo è anche in frequenza, da una funzione modulante diversa, viceversa:

$$\boxed{m_f(t) = \frac{D_f}{D_\phi} \left[ \frac{d m_p(t)}{dt} \right]} \quad \text{e} \quad \boxed{m_p(t) = \frac{D_\phi}{D_f} \int_{-\infty}^t m_f(\sigma) d\sigma}$$

Dato un segnale porta-banda  $s(t) = R(t) \cos \psi(t)$ , si definisce frequenza istantanea  $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{d\psi(t)}{dt} \right] = f_c + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{d\theta(t)}{dt} \right]$  se  $\psi(t) = \omega_c t + \theta(t)$ .

Per un segnale FM la freq. istantanea è:  $\boxed{f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} D_f m(t)}$  la cui si nota come la freq. portante sia "modulata" da  $m(t)$ .

La deviazione di frequenza dalla portante è:  $f_d(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$ , il cui

massimo è  $\Delta F = \max(f_d(t))$ ; si definisce anche la deviazione picco-picco:

$$\boxed{\Delta F_{pp} = \max(f_d(t)) - \min(f_d(t))}$$

Per la FM si ha  $\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p$ , con  $V_p = \max[m(t)]$ .

All'aumentare dell'ampiezza del segnale modulante  $V_p$ , aumenta  $\Delta F$ : questo provoca l'aumento della banda del segnale FM, senza intaccare la potenza media, che rimane  $A_c^2/2$ : le componenti spettrali decrescono in ampiezza e si avvicinano altre + lontane. Nella AM, invece, l'ampiezza di  $m(t)$  influisce sulla potenza del segnale modulato, senza alterarne la banda.

Si definisce anche la deviazione di fase di picco:  $\Delta\theta = \max[\theta(t)]$ , che per la PM è data da  $\Delta\theta = D_p V_p$ , con  $V_p = \max[m(t)]$ .

L'indice di modulazione di fase  $\beta$ :  $\beta = \Delta\theta$  è delle modulazioni di frequenza  $\beta_f = \Delta F / B$ , in cui  $\Delta F$  è la deviazione di freq. di picco e  $B$  è la banda del segnale modulante (se  $m(t)$  è sinusoidale corrisponde alla freq. della sinusoidale).

Se per la FM che per la PM (quindi i segnali modulati in angolo) si ha:

$$S(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$$

con  $G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[A_c e^{j\theta(t)}]$ .

Se si modula in angolo un segnale con  $m(t)$  sinusoidale si ottiene:

$$G(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \delta(f - n f_m),$$

in cui  $J_n(\beta)$  è la funzione di Bessel del primo ordine (calcolabile per memorie) ed  $f_m$  è la frequenza della sinusoidale modulante. Inoltre:

a)  $\beta = D_p A_m$  con  $m_p(t) = A_m \sin \omega_m t$  se PM

b)  $\beta = D_f A_m / \omega_m$  se FM

Si può dimostrare che il 98% della potenza totale è contenuta nelle bande:

$$B_r \approx 2(\beta + 1)B$$

regola di CARSON

NO!  $\rightarrow$

MODULAZIONE A BANDA STRETTA (ANGOLARE)

Se  $|\theta(t)| < 0.2$  si può sviluppare l'inviluppo complesso in serie di Taylor; dato che  $e^x \approx 1+x$  se  $|x| \ll 1$  si ha:  $g(t) \approx A_c [1 + j\theta(t)]$ , da cui:

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos \omega_c t}_{\text{PORTANTE}} - \underbrace{A_c \theta(t) \sin \omega_c t}_{\text{BANDE LATERALI}}$$

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \{ [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + j[\Theta(f - f_c) - \Theta(f + f_c)] \} \quad \text{in cui: } (29)$$



$$\Theta(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \begin{cases} D_f M(f) & \text{FM} \\ \frac{D_f \cdot M(f)}{f^{2\pi} f} & \text{PM} \end{cases}$$

NO

Per un segnale modulato in frequenza a banda larga si ha:

$$s(t) = A_c \cos \left[ \omega_c t + D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma \right]$$

$$S(f) = \frac{\pi A_c^2}{2 D_f} \left[ f_m \left( \frac{2\pi}{D_f} (f - f_c) \right) + f_m \left( \frac{2\pi}{D_f} (-f - f_c) \right) \right]$$

con  $f_m(\cdot)$  densità di probabilità del segnale modulante.

ESERCIZIO

Un segnale è modulato DSB-SC con  $m(t) = \cos \omega_1 t + 2 \cos 2\omega_1 t$ , dove  $\omega_1 = 2\pi f_1$ ,  $f_1 = 500 \text{ Hz}$  e  $A_c = 1$ .

a) scrivere l'espressione del segnale modulato: sappiamo che  $s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t$

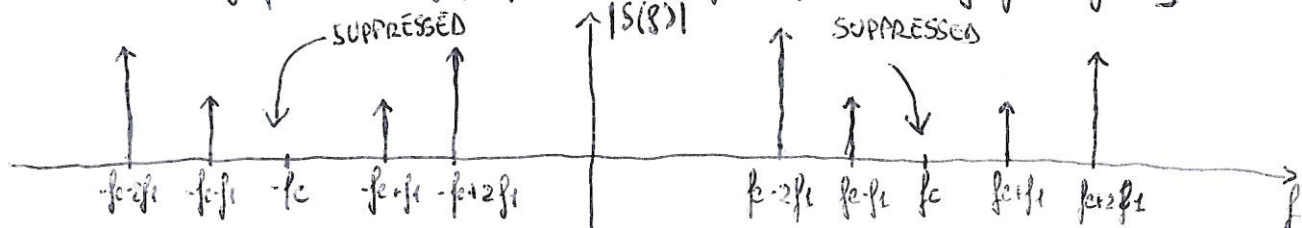
per cui:  $s(t) = [\cos \omega_1 t + 2 \cos 2\omega_1 t] \cos \omega_c t$ ;

b) trovare lo spettro del segnale modulato DSB-SC: sappiamo che  $S(f) = \frac{A_c}{2}$

•  $[M(f - f_c) + M(f + f_c)]$ , per cui ci serve la  $\mathcal{F}$  di  $m(t)$ ; dalla teoria dello  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}[m(t)] = \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] + \frac{1}{2} \cdot 2 [\delta(f - 2f_1) + \delta(f + 2f_1)] = \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1) + 2\delta(f - 2f_1) + 2\delta(f + 2f_1)]$$

$$S(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [\delta(f - f_c - f_1) + \delta(f - f_c + f_1) + 2\delta(f - f_c - 2f_1) + 2\delta(f - f_c + 2f_1) + \delta(f + f_c - f_1) + \delta(f + f_c + f_1) + 2\delta(f + f_c - 2f_1) + 2\delta(f + f_c + 2f_1)]$$



c) determinare il valore della potenza media:

$$P = \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle \quad (\text{moltiplicare la parte relativa alla portante})$$

parte colorata  $\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \omega_1 t dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 4 \cos^2 2\omega_1 t dt +$   
 $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 4 \cos \omega_1 t \cos 2\omega_1 t dt \quad \text{con } T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{500} \frac{2\pi}{2\pi}, \text{ per cui:}$

$$\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos 2\omega_1 t) dt + \frac{4}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos 4\omega_1 t) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(\omega_1 - 2\omega_1)t + \cos(3\omega_1)t] dt$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=4} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

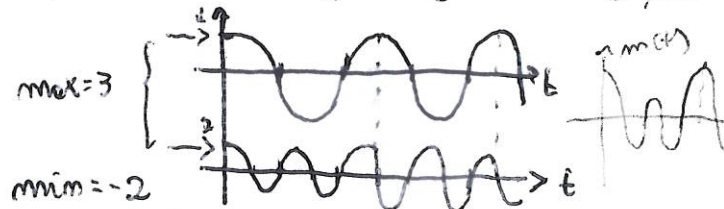
poiché  $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ , quindi:

$$\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} + 0 = \frac{5}{2} \quad \text{da cui} \quad \boxed{P = \frac{1}{2} A_c^2 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ W}}$$

b) determinare la potenza di picco:  $P_{PEP} = \frac{1}{2} A_c^2 \{\max[m(t)]\}^2$ , poiché le due componenti sinusoidali hanno freq. di oscillazione  $f_2 = 2f_1$ , arriveranno massimo solo o ~~per~~ simultaneamente (ad esempio per  $t=0$ ), per cui  $\max[m(t)] = 1+2=3$ , da cui

$$\boxed{P_{PEP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2 = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ W}}$$

ESEMPIO NO



Trasmettitore SSB con  $m(t) = 5 \cos \omega_1 t$ ,  $\omega_1 = 2\pi f_1$  ed  $f_1 = 500 \text{ Hz}$ ,  $A_c = 1$

d) trovare  $\hat{m}(t)$ ; in pratica di calcolo la trasformata di Hilbert, cioè

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda$$

Dalle tabelle di trasformazione  $\sin(\omega t + \theta) \xrightarrow{H_t} -\cos(\omega t + \theta)$ , per cui

$$m(t) = 5 \cos \omega_1 t = 5 \sin(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \hat{m}(t) = -5 \cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) = \underline{\underline{-5 \sin \omega_1 t = -\hat{m}(t)}}$$

b) scrivere l'espressione del segnale modulato per la SSB a banda laterale inferiore:  
 si prende il + per la LSSB

$$s(t) = A_c [m(t) \cos \omega_c t (+) \hat{m}(t) \sin \omega_c t] =$$

$$= 5 \cos \omega_1 t \cos \omega_c t - 5 \sin \omega_1 t \sin \omega_c t = \underline{\underline{5 \cos(\omega_1 + \omega_c)t}}$$



c) calcolare il valore efficace del segnale SSB :

$$\boxed{\text{hip: } \omega_c : \omega_{ws}}$$

$$S_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 25 \cos^2(\omega_c + \omega_s)t} = \sqrt{\frac{25}{2}} V \approx 3,53 V$$

$$\text{poiché } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

ESEMPI(2b)

Un segnale modulato è descritto da :

$$s(t) = 10 \cos[(2\pi \times 10^8)t + 10 \cos(2\pi \times 10^3 t)]$$

a) calcolare la massima deviazione di fase : il segnale è della forma :

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] \text{ con } \theta(t) = 10 \cos \omega_s t$$

in cui  $A_c = 10$ ,  $f_c = 10^8 \text{ Hz}$  ed  $f_s = 10^3 \text{ Hz}$ . Se il segnale è modulato in fase vale  $\theta(t) = D_p m(t)$  e  $\Delta\theta = \max[\theta(t)]$ , cioè  $\Delta\theta = 10$ ; equivalentemente  $\Delta\theta = D_p V_p$  con  $V_p = \max[m(t)]$ ; ottenendo  $D_p = 10$  e  $\max[m(t)] = 1$  vale  $\boxed{\Delta\theta = 10 \text{ rad}}$

b) calcolare la massima deviazione di frequenza :  $\Delta F = \max \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} \right\}$  :

poiché  $\theta(t) = 10 \cos \omega_s t \Rightarrow d\theta(t)/dt = -10\omega_s \sin \omega_s t$ , il cui massimo è  $10\omega_s$ , per cui  $\boxed{\Delta F = \frac{10 \cdot 2\pi \cdot 10^3}{2\pi} \text{ Hz} = 10 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 10 \text{ kHz}}$

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

ESEMPI(2c) con B

Si dato

Modulatore FM con  $D_f = 50 \text{ Hz/V}$ ; si pone in ingresso un segnale modulante con ampiezza  $4V$  e frequenza  $1 \text{ kHz}$ . Calcolare :  $m(t) = 4 \cdot \cos 2\pi \cdot 1 \cdot t$

a) deviazione di frequenza di picco :  $\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p$  e  $V_p = \max[m(t)] = 4V$ , per cui  $\Delta F = \frac{1}{2\pi} \cdot 50 \cdot 4 = \frac{100}{\pi} \text{ Hz} \Rightarrow \Delta F = \frac{100 \cdot 2\pi}{\pi} = \boxed{200 \text{ Hz}}$

b) calcolare l'indice di modulazione :  $\beta_f = \frac{\Delta F}{B}$  dove  $B = 1 \text{ kHz}$  (per segnali sinusoidali la larghezza di banda coincide con la freq. di oscillazione)  $\Rightarrow \beta_f = \frac{100}{\pi \cdot 1000} = \frac{0.1}{\pi} \approx 0.031 \Rightarrow \boxed{\beta_f = \frac{0.1}{\pi} \cdot 2\pi = 0.2}$

$$\beta_f = \frac{200}{1000} = 0.2$$

ESERCIZIO X CASI) B-A

$$B_T \approx 2(\beta + 1) B$$

$$\beta = D_f \cdot \frac{\Delta \omega}{\omega_m}$$

Un segnale FM è modulato da un segnale sinusoidale con frequenza  $f_m = 15 \text{ kHz}$  e indice di modulazione  $\beta = 2.0$ . Trovare la banda di trasmissione usando la formula di Carson e dire quale % della potenza totale del segnale FM si trova all'interno della banda di Carson.

ESERCIZIO ) NON FATTO B

$$B_T = 2 \cdot (2 + 1) \cdot 15000 = 90000 \text{ Hz}$$

Un segnale modulato a RF è dato da  $500 \cos[\omega_c t + 20 \cos \omega_1 t]$ , con  $\omega_1 = 2\pi f_1$ ,  $f_1 = 1 \text{ kHz}$  ed  $f_c = 100 \text{ MHz}$ .

a) Se la costante di deviazione di freq. è  $100 \text{ rad/V}$ , scrivere l'espressione di  $m(t)$  e determinarne il valore di picco. Abbiamo  $D_p = 100$  e  $\phi(t) = D_p m(t)$ , cioè  $100 m(t) = 20 \cos \omega_1 t \Rightarrow m(t) = \frac{1}{5} \cos \omega_1 t = 0.2 \cos 2\pi \cdot 1000 t$  il cui valore di picco è  $0.2 \text{ V}$

b) Se la costante di deviazione di freq. è  $1 \times 10^6 \text{ rad/V}$ , trovare l'espressione di  $m(t)$  e il relativo valore di picco:  $D_f = 1 \times 10^6$ . Si può usare la relazione:

$$m_f(t) = \frac{D_p}{D_f} \left[ \frac{d m_p(t)}{dt} \right] = \frac{100}{1 \times 10^6} \cdot \left[ 0.2 \cdot 2\pi \cdot 1000 (-\sin 2\pi \cdot 1000 t) \right] = \frac{0.2 \cdot 1 \times 10^5}{1 \times 10^6} \cdot 2\pi \sin 2000\pi t$$

$$= -0.1256 \sin 2000\pi t, \text{ il cui valore di picco è } 0.1256 \text{ V}$$

c) Ricavare la potenza media e quella di picco, quando il segnale RF è preso ai capi di un carico pari a  $50 \Omega$ .

La relazione fondamentale è:  $P = \langle s^2(t) \rangle / R$ , ma  $\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle$

$$\text{per cui } P = \frac{1}{2} \cdot \langle |A_c e^{j\phi(t)}|^2 \rangle \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{2R} \cdot A_c^2 \langle |e^{j\phi(t)}|^2 \rangle = \frac{500^2}{2 \cdot 50} = 2500 \text{ W}$$

$$\text{Inoltre } P_{PEP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot [\max |g(t)|]^2 = \frac{1}{2 \cdot 50} [500]^2 = 2500 \text{ W}$$