



# Corso di Sistemi Telematici A.A. 2014-2015

## Lezione 5: Segnali Digitali e a Impulsi in Bandabase I



# Struttura della lezione

- **Codifica digitale dei segnali analogici**
  - Pulse-amplitude modulation (PAM)
  - Pulse-code modulation (PCM)
- **Segnali digitali binari e multilivello**
- **Codici di linea**
- **Spettro e banda dei segnali digitali**
- **Riduzione dell'interferenza intersimbolica**



# Pulse-Amplitude modulation (PAM)

- ❑ Conversione di un segnale analogico in un segnale a impulsi, dove l'ampiezza di ogni impulso rappresenta l'informazione analogica
- ❑ Usando segnale impulsivo (con impulsi di durata finita), la banda del segnale PAM è più grande di quella del segnale di partenza;
- ❑ tuttavia i treni di impulsi sono di uso più pratico per i sistemi digitali
- ❑ Il campionamento avviene con frequenza:

$$f_s \geq 2B$$

Teorema di Nyquist

- ❑ **Campionamento di tipo naturale:**
  - tramite una porta analogica
  - semplice da realizzare
- ❑ **Campionamento di tipo istantaneo:**
  - interpolazione con impulsi rettangolari
  - utilizzato per la conversione PCM



# Campionamento naturale e campionamento istantaneo

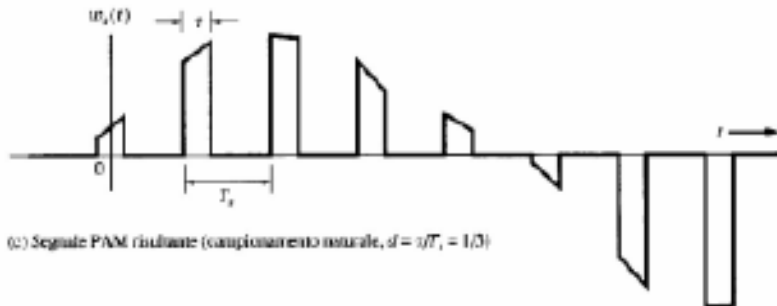
## Campionamento naturale



(a) Segnale analogico in banda base

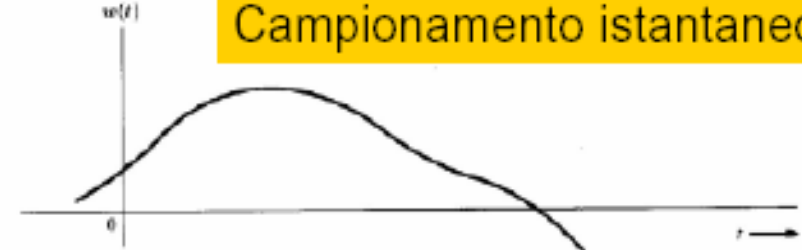


(b) Onde rettangolare con fattore di attività  $d = \tau/T_s = 1/3$

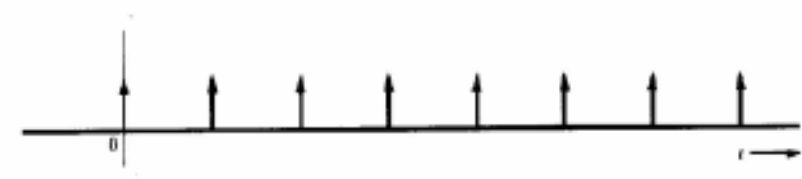


(c) Segnale PAM risultante (campionamento naturale,  $d = \tau/T_s = 1/3$ )

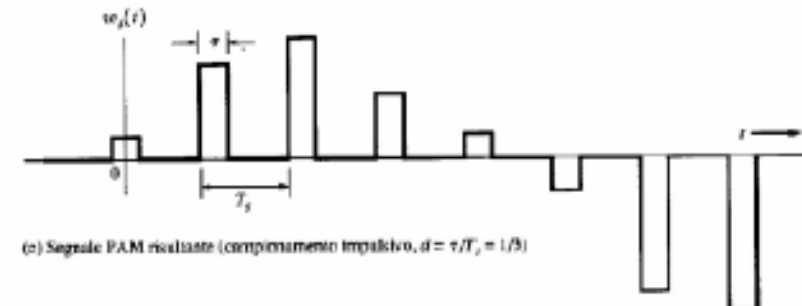
## Campionamento istantaneo



(a) Segnale analogico in banda base



(b) Traino di impulsi di campionamento



(c) Segnale PAM risultante (campionamento istantaneo,  $d = \tau/T_s = 1/3$ )



# Campionamento naturale

- **Definizione:** se  $w(t)$  è un segnale analogico con banda limitata a  $B$  Hz, il segnale PAM con **campionamento naturale** è:

$$w_s(t) = w(t) s(t)$$

dove:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_s}{\tau}\right)$$

treno di impulsi ciascuno con durata  $\tau$

$$f_s = 1/T_s \geq 2B$$

frequenza di campionamento

- **Spettro di un segnale PAM con campionamento naturale**

$$W_s(f) = \mathcal{F}\{w_s(t)\} = d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(nd) \cdot W(f - nf_s)$$

dove:  $\omega_s = 2\pi f_s$

$W(f)$  Spettro forma d'onda originaria

$d = \tau/T_s$  Duty cycle

# Spettro di un segnale PAM con campionamento naturale: dimostrazione

**Dimostrazione.** Calcolando la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'equazione (3-1) si ha

$$W_s(f) = W(f) * S(f) \quad (3-4)$$

D'altronde  $s(t)$  può essere espanso in serie di Fourier come segue:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \quad (3-5a)$$

dove

$$c_n = d \frac{\sin n\pi d}{n\pi d} \quad (3-5b)$$

Poiché  $s(t)$  è periodica, possiamo usare (2-109) per ottenerne lo spettro:

(2-109)

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_s) \quad (3-6)$$

cosicché la (3-4) diventa

$$W_s(f) = W(f) * \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_s) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n W(f) * \delta(f - nf_s)$$

ovvero

$$W_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n W(f - nf_s) \quad (3-7)$$

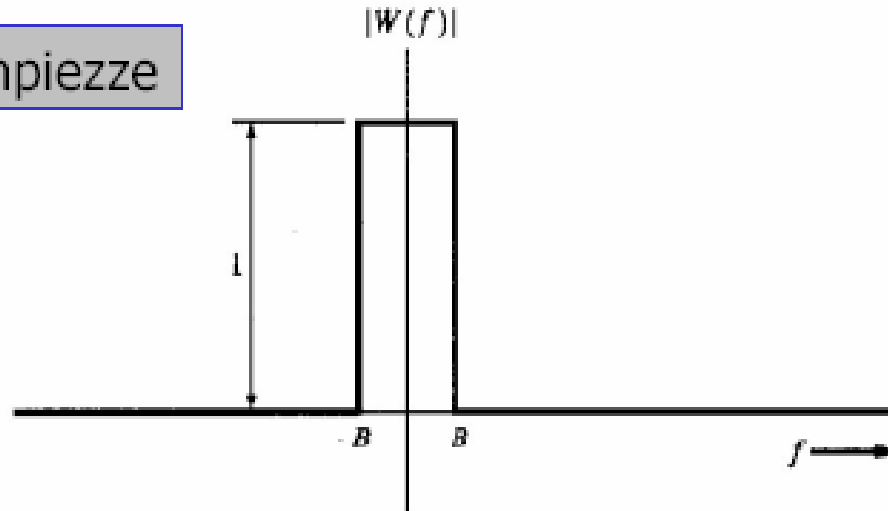
che coincide con la (3-3) non appena sostituiamo la (3.5b).



# Esempio: campionamento naturale con duty-cycle $d=1/3$

- ❑ **Segnale di partenza:**
  - spettro rettangolare
- ❑ **Duty-cycle**= $d=1/3$
- ❑ **Frequenza di campionamento:**  $f_s=4B$

Spettro delle ampiezze

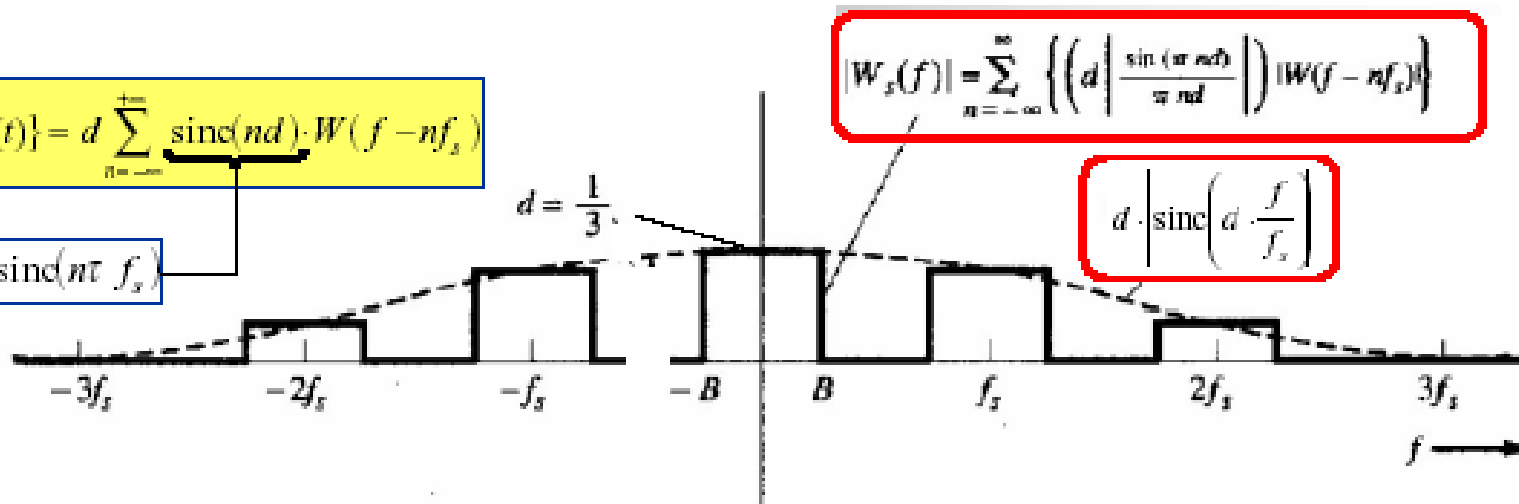


(a) Spettro di ampiezza del segnale analogico di ingresso

# Esempio: campionamento naturale con duty-cycle $d=1/3$

$$W_s(f) = \mathcal{F}\{w_s(t)\} = d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\text{sinc}(nd)}_{\text{sinc}(nT f_s)} \cdot W(f - nf_s)$$

$$\text{sinc}(nT f_s)$$



$$|W_s(f)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left( d \left| \frac{\text{sinc}\left(d \cdot \frac{f - nf_s}{f_s}\right)}{d} \right| \right) |W(f - nf_s)| \right\}$$

$$d \cdot \left| \text{sinc}\left(d \cdot \frac{f}{f_s}\right) \right|$$

(b) Spettro di ampiezza del segnale PAM (campionamento naturale) con  $d = 1/3$  e  $f_s = 4B$

- Lo spettro del segnale PAM viene replicato sui multipli della frequenza di campionamento
- Lo spettro del segnale PAM è nullo alle frequenze  $\pm 3f_s, \pm 6f_s, \dots$
- La banda del segnale PAM è molto più grande di quella del segnale di partenza (la banda al primo nullo è  $3f_s = 12B$ )





## In ricezione

- ❑ Il segnale di origine può essere recuperato, a meno di una costante moltiplicativa da compensare con un amplificatore, filtrando il segnale PAM in un filtro passa-basso con frequenza di taglio  $B < f_{\text{taglio}} < f_s - B$

■ Dato che tutti i segnali fisici hanno durata limitata, hanno banda illimitata



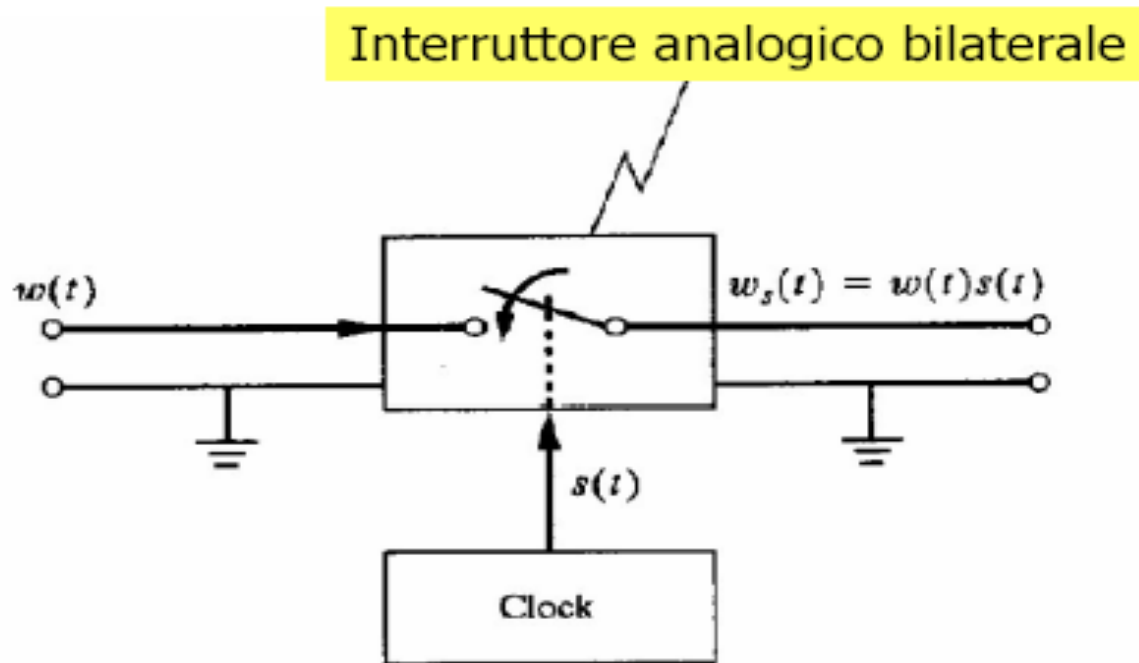
■ Necessità di un filtro *anti-aliasing*



# Realizzazione di campionamento naturale per la generazione di un segnale PAM

## □ Uso di una porta analogica

- ad esempio la porta bilaterale quadrupla 4016 in tecnologia CMOS





# PAM con campionamento istantaneo e interpolazione con impulso rettangolare

- **Definizione:** se  $w(t)$  è un segnale analogico con banda limitata a  $B$  Hz, il segnale PAM con **campionamento istantaneo** è:

$$w_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(kT_s) h(t - kT_s)$$

dove:

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \tau \leq T_s$$

impulso campionatore

$$f_s = 1/T_s \geq 2B$$

frequenza di campionamento

- **Teorema:**

- **Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo e interpolazione con impulso rettangolare:**

$$W_s(f) = \mathfrak{F}\{w_s(t)\} = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - kf_s)$$

dove:

$$H(f) = \mathfrak{F}(h(t)) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$$

# Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo: dimostrazione

$$w_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(kT_s) h(t - kT_s) \quad (3-8)$$

**Dímostrazione.** Lo spettro del segnale con campionamento istantaneo si trova calcolando la trasformata di Fourier della (3-8). Innanzitutto riscriviamo quest'ultima usando un'operazione di convoluzione:

$$\begin{aligned} w_s(t) &= \sum_k w(kT_s) h(t) * \delta(t - kT_s) \\ &= h(t) * \sum_k w(kT_s) \delta(t - kT_s) \end{aligned}$$

Dunque

$$w_s(t) = h(t) * \left[ w(t) \sum_k \delta(t - kT_s) \right]$$

e lo spettro è

$$W_s(f) = H(f) \left[ W(f) * \sum_k e^{-j2\pi f kT_s} \right] \quad (3-12)$$

calcoliamola

# Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo: dimostrazione

Sappiamo che il segnale pettine è periodico, e il suo sviluppo in serie di Fourier è:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

Poniamo:  $t \rightarrow f$

$$T_0 \rightarrow f_s = \frac{1}{T_s}$$

Coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del pettine con periodo  $f_s$

$$c_k = \frac{1}{f_s}$$

Poniamo:  $k \rightarrow -k$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk2\pi f T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_s)$$

$$\sum_k e^{-j2\pi f k T_s}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f T_s}$$

# Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo: dimostrazione

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk2\pi fT_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_s)$$

Usando questa relazione nella (3-12) si ottiene

$$W_s(f) = H(f) \left[ W(f) * \sum_k e^{-j2\pi f k T_s} \right]$$

$$W_s(f) = H(f) \left[ W(f) * \frac{1}{T_s} \sum_k \delta(f - k f_s) \right]$$

$$= \frac{1}{T_s} H(f) \left[ \sum_k W(f) * \delta(f - k f_s) \right]$$

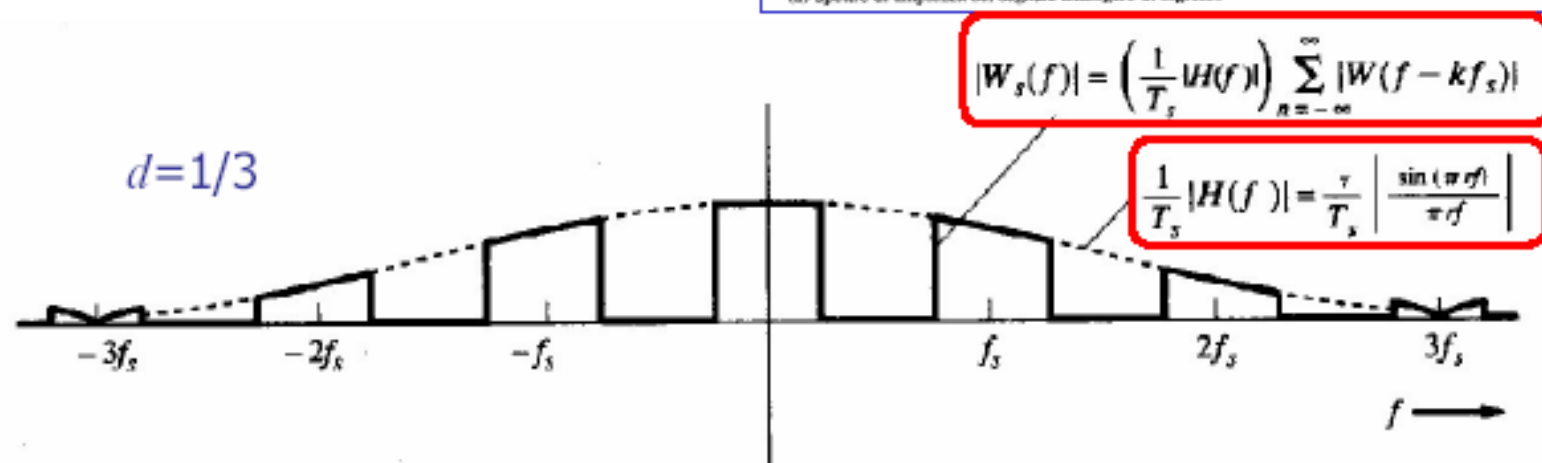
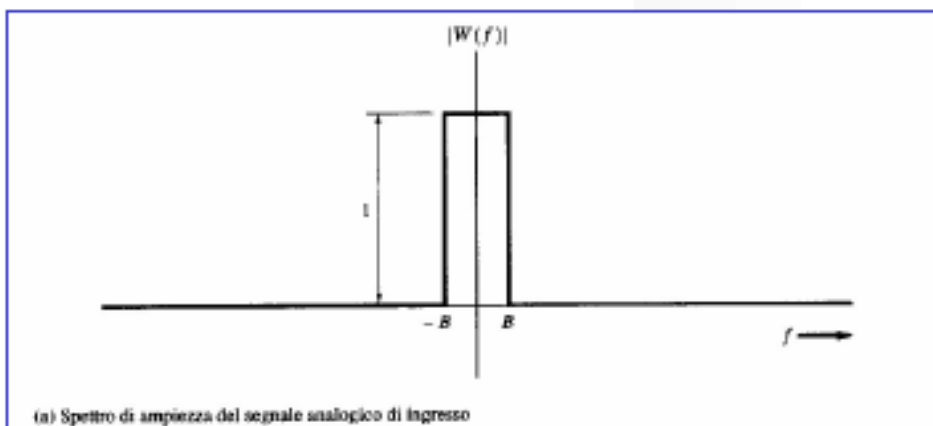
che coincide con la (3-10).

$$W_s(f) = \mathfrak{F}\{w_s(t)\} = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - k f_s)$$

# Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo con duty-cycle $d=1/3$

$$W_s(f) = \mathfrak{F}\{w_s(t)\} = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - kf_s)$$

$$H(f) = \mathfrak{F}\{h(t)\} = \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$$



(b) Spettro di ampiezza del segnale PAM (campionamento impulsivo),  $\tau/T_s = 1/3$  e  $f_s = 4B$



# Segnale PAM con campionamento istantaneo: discussione

- ❑ Questo tipo di segnale PAM consiste in campioni istantanei
- ❑ Il segnale PAM a impulso rettangolare può essere generato dai circuiti elettronici **"sample & hold"**
- ❑ In ricezione:
  - è necessario utilizzare un filtro passa-basso per eliminare le repliche dello spettro, come per il campionamento naturale
  - tuttavia si ha in più una distorsione sul segnale causata da un effetto filtrante dell'impulso di campionamento  $h(t)$  (**distorsione d'apertura**)
- ❑ La distorsione in ricezione può essere diminuita:
  - diminuendo la durata dell'impulso  $t$  (l'apertura)
  - modificando la risposta in frequenza del filtro di ricostruzione; si utilizza in ricezione un **filtro equalizzatore** con risposta in frequenza pari a  $1/H(f)$





# Applicazioni della modulazione PAM

- ❑ **La trasmissione di un segnale PAM richiede un canale di comunicazione a larga banda, a causa della ridotta durata degli impulsi**
- ❑ **È meno robusto al rumore rispetto al segnale analogico**
- ❑ **Viene quindi utilizzato principalmente:**
  - come primo passo per la conversione del segnale in PCM
  - per confinare il segnale analogico in intervalli temporali (time slot), in sistemi basati su multiplexazione a divisione di tempo (TDM)



# Pulse-code modulation (PCM)

## □ Definizione:

- la modulazione con codici a impulsi (pulse-code modulation - PCM) è un tipo particolare di **conversione analogico-digitale**
- l'informazione contenuta nel campione (istantaneo) di un segnale analogico viene rappresentata da una "**parola di codice**" digitale organizzata in un flusso di dati binari

## □ Parole di codice

- sia  $n$  il numero di bit costituenti la singola parola di codice
- esistono  $M=2^N$  parole di codice distinte; ciascuna rappresenta un diverso livello di ampiezza del segnale [**QUANTIZZAZIONE**]:
- l'esatto valore del segnale viene rimpiazzato dal più vicino degli  $M$  valori permessi

## □ Altre tecniche di conversione analogico-digitale:

- Modulazione delta
- PCM differenziale (DPCM)



# Vantaggi e svantaggi del PCM

## □ Vantaggi:

- La circuiteria è digitale e a basso costo
  - I segnali PCM derivanti da sorgenti analogiche (audio, video, voce) possono essere multiplati con segnali dati e trasmessi su di un'unica rete digitale
- Nei sistemi di telefonia digitale a lunga distanza con ripetitori è possibile **rigenerare** i segnali PCM, eliminandone completamente i disturbi
- È possibile utilizzare delle tecniche di codifica di canale per proteggere i segnali dal rumore

## □ Svantaggi:

- Necessità di maggiore banda rispetto ai segnali analogici



# Ripetitori di segnale in cascata sul percorso sorgente-destinazione

## ❑ Per segnali analogici:

- Ripetitori lineari (filtri e amplificatori)
- I disturbi e le distorsioni si accumulano ripetitore per ripetitore

## ❑ Per segnali digitali:

- Ripetitori rigenerativi
- Interpretano la sequenza di bit ricevuta con un rivelatore a soglia, e la rigenerano
- Se non ci sono stati errori nella rivelazione, riproducono una replica del segnale digitale originale senza aggiunta di disturbi
- La spaziatura tra tali ripetitori (lunghezza della tratta) dipende dall'attenuazione del portante (cavo in rame, fibra ottica, radioonde), e dalla quantità di rumore di canale



# Campionamento, quantizzazione e codifica

## □ Tre fasi per la generazione del segnale PCM:

### ○ Fase 1: Campionamento

- genera un segnale PAM con impulso rettangolare a partire dal segnale analogico

### ○ Fase 2: Quantizzazione

- il segnale PAM viene quantizzato sostituendo ai valori nel continuo dei valori tra gli  $M$  valori ammessi
- quantizzazione:
- uniforme: tutti i livelli di quantizzazione sono equidistanti
- non uniforme: le ampiezze dei livelli di quantizzazione vengono scelte opportunamente a seconda del segnale da trasformare in digitale



# Campionamento, quantizzazione e codifica

## □ Tre fasi per la generazione del segnale PCM:

### □ Fase 2: Quantizzazione

- errore di quantizzazione:
- differenza tra il segnale analogico all'ingresso del quantizzatore, e quello all'uscita del quantizzatore; il valore di picco di questo errore è pari alla metà del passo di quantizzazione
- campionando alla frequenza di Nyquist, e trascurando il rumore di canale, rimane ancora l'effetto di tale errore, detto **rumore di quantizzazione**



# Campionamento, quantizzazione e codifica

## □ Tre fasi per la generazione del segnale PCM:

### □ Fase 3: Codifica

- Prende in ingresso il segnale PAM quantizzato ottenuto al passo precedente, e associa ad ogni valore del segnale quantizzato una parola di codice binaria
- Esempio: codifica Gray, che associa parole che differiscono di un solo bit a livelli di quantizzazione adiacenti, in modo che errori su un singolo bit non di segno causano errori minimi nell'ampiezza ricostruita

# Campionamento, quantizzazione e codifica

## ■ Esempio: codice Gray

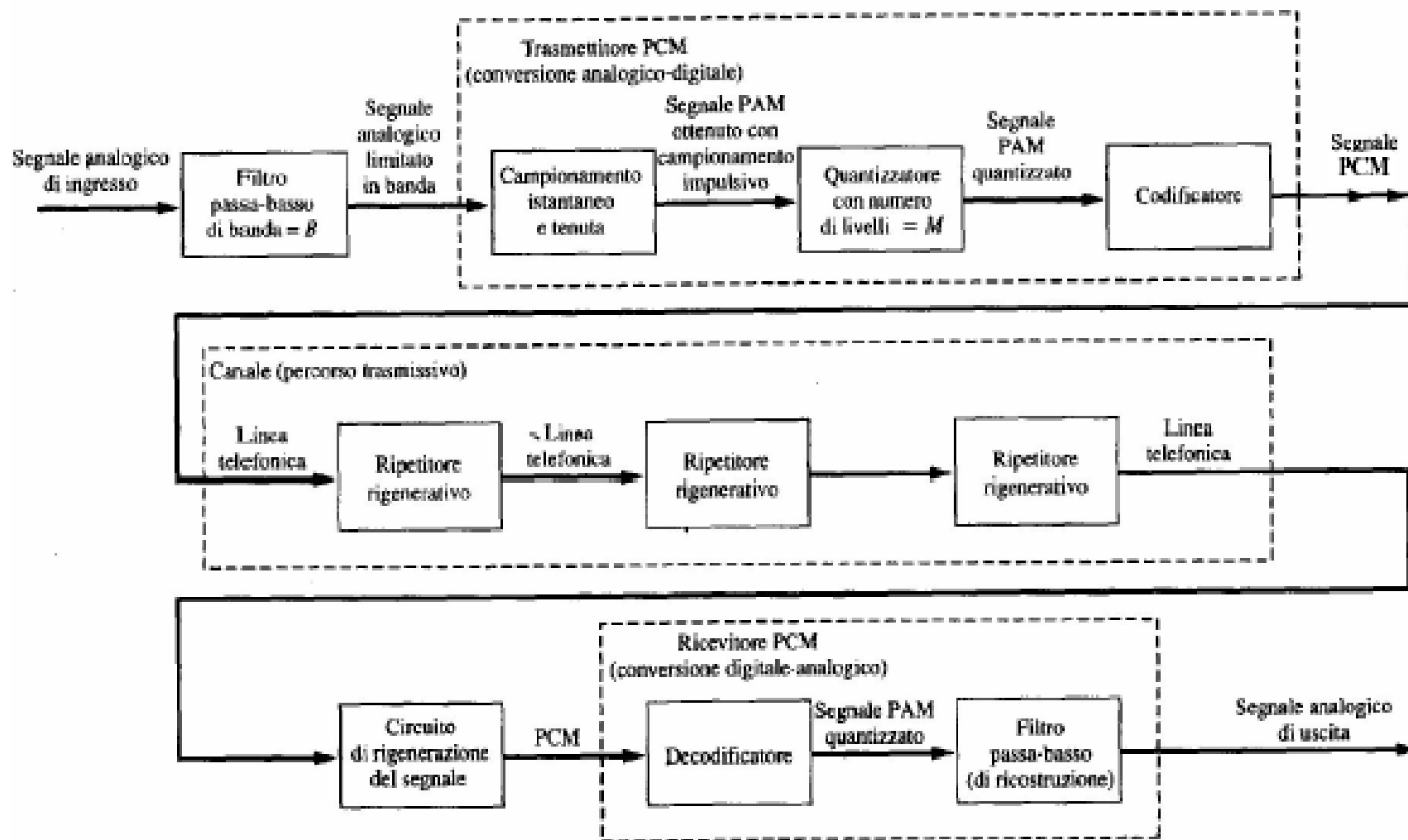
**TABELLA 3-1 CODICE GRAY A TRE BIT PER M = 8 LIVELLI**

Campioni quantizzati di tensione	Parola di codice con codifica Gray (segnale PCM di uscita)
+8 V	110
+6 V	111
+4 V	101
+2 V	100
0 V	
-2 V	000
-4 V	001
-6 V	011
-8 V	010

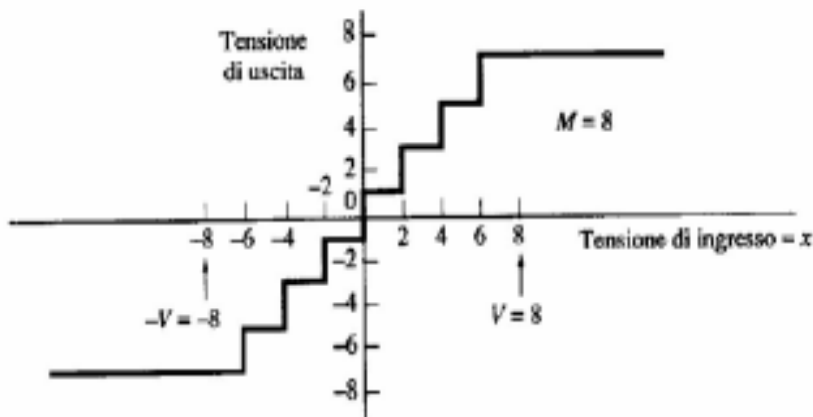
Immagine speculare (a eccezione del bit di segno).



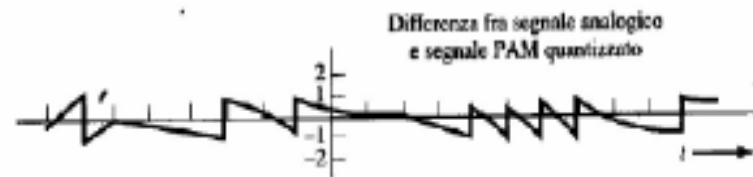
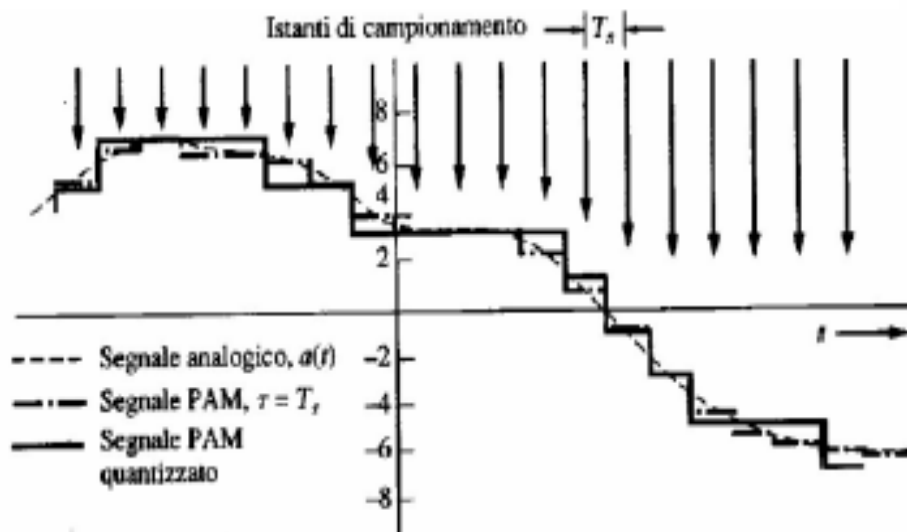
# Sistema di trasmissione PCM



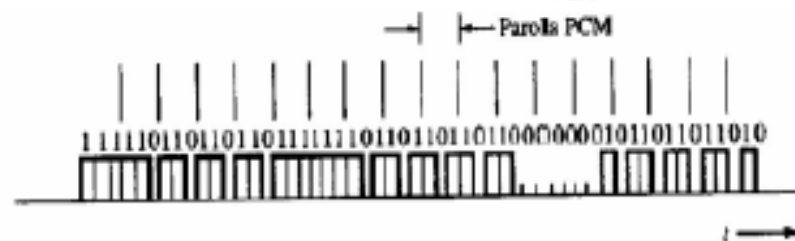
# Andamento dei segnali nel sistema PCM



(a) Caratteristica ingresso-uscita del quantizzatore

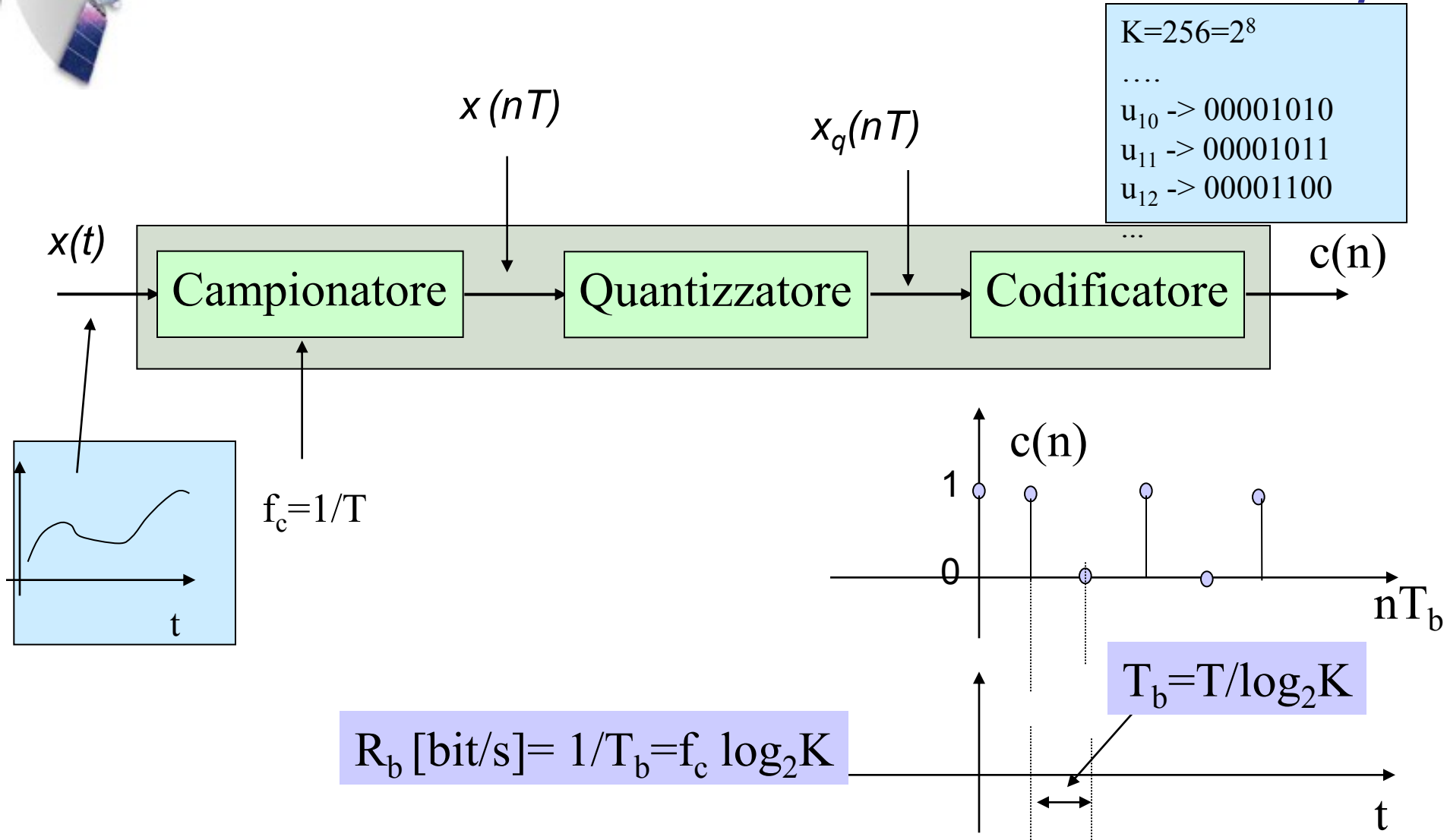


(c) Segnale errore



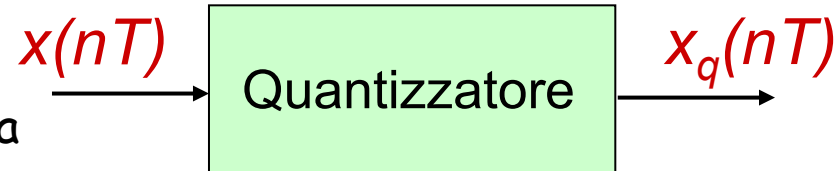
(d) Segnale PCM

# Schema a blocchi del convertitore A/D





# La quantizzazione

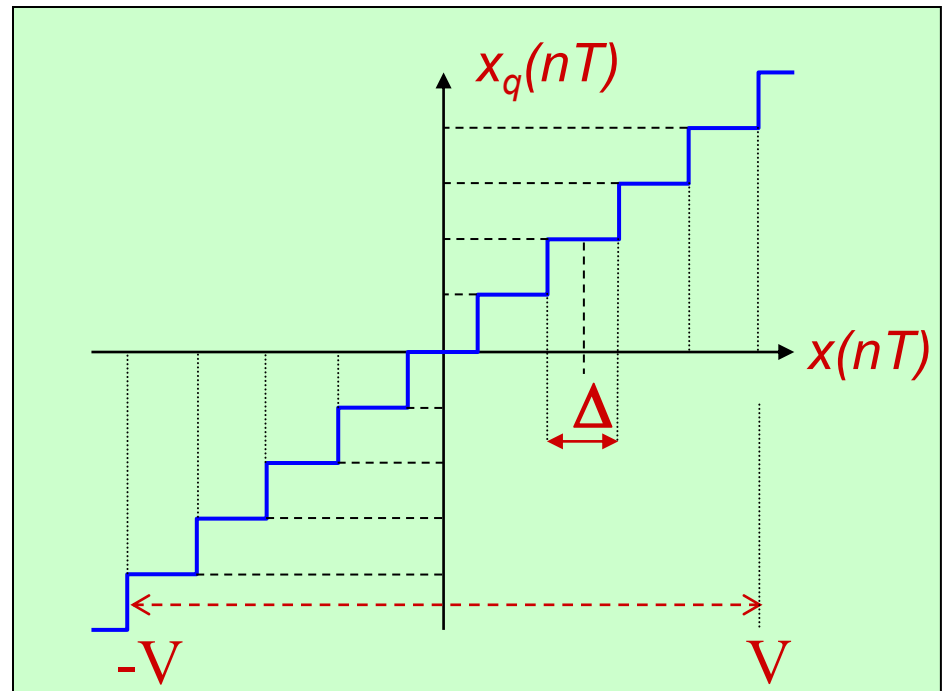


Il quantizzatore e' un dispositivo che trasforma il campione reale  $x(nT)$  nel campione quantizzato con un numero  $K$  di livelli  $x_q(nT)$ .

Ad esempio se il minimo e il massimo valore che puo' assumere il campione  $x(nT)$  sono  $-V$  e  $V$ , la relazione tra il valore continuo  $x(nT)$  e quello quantizzato  $x_q(nT)$ , e' rappresentata da una scalinata con  $K$  livelli.

L'intervallo di quantizzazione  $\Delta$  e':

$$\Delta = \frac{2V}{K}$$



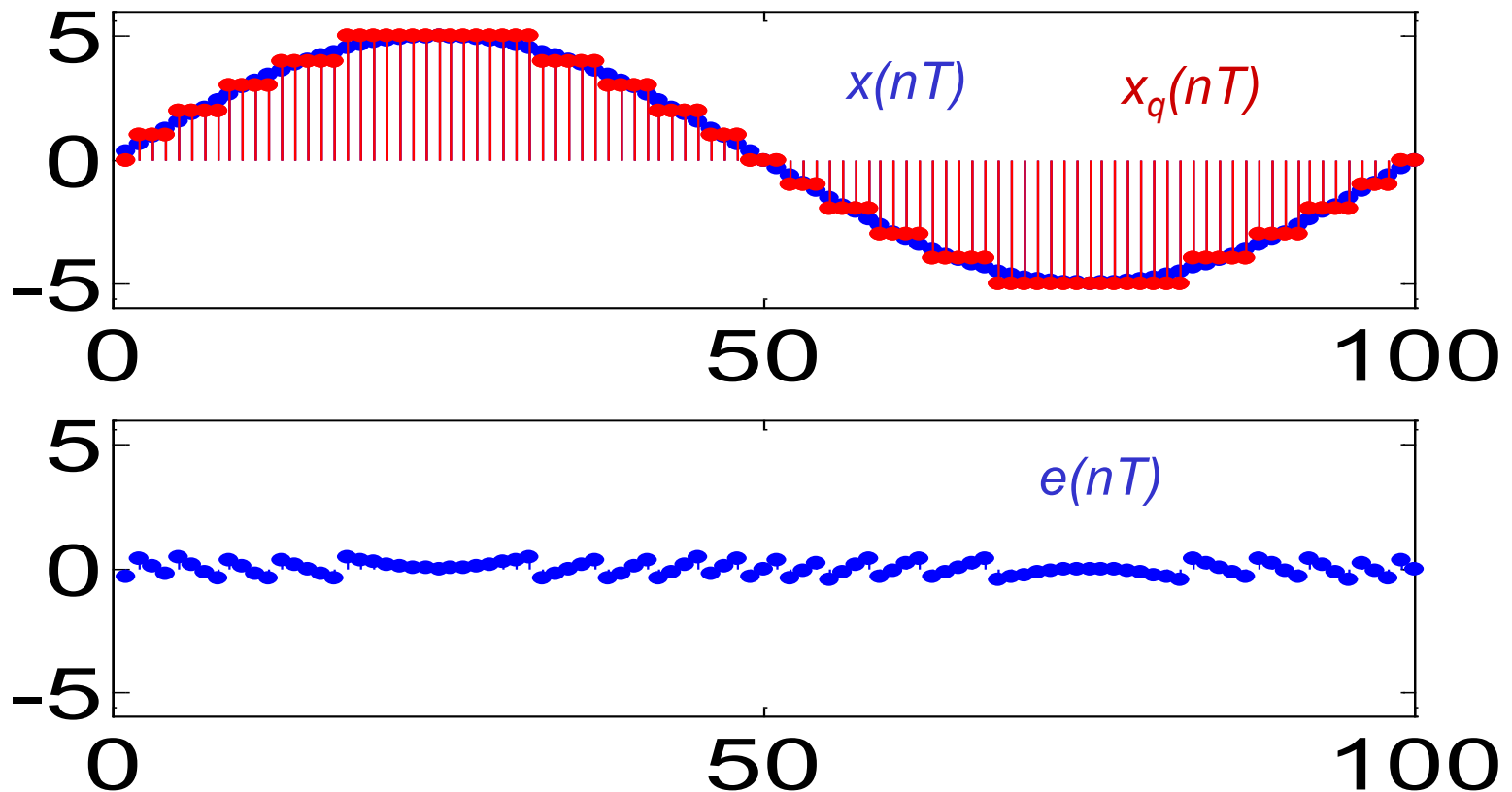


# L'errore di quantizzazione

Quantizzando si commette un errore tanto piu' piccolo quanto piu' elevato e' il numero  $K$  di livelli.

L'errore di quantizzazione e' definito come:

$$e(nT) = x_q(nT) - x(nT)$$





# Occupazione di banda dei segnali PCM

- ❑ **Per la PAM (che è una modulazione lineare) lo spettro può essere calcolato dallo spettro del segnale analogico**
- ❑ **Il PCM è una modulazione non-lineare del segnale analogico d'ingresso; quindi il suo spettro non è facilmente calcolabile**
- ❑ **La banda di un PCM dipende anche:**
  - dalla velocità di bit
  - dalla forma dell'impulso elementare usato per rappresentare i dati
- ❑ **Cadenza di bit (bit -rate):**

$$R = n f_s$$

dove  $n$  : numero di bit per parola di codice

$f_s$  : frequenza di campionamento

**Per evitare aliasing:**

$$f_s \geq 2B$$

# Occupazione di banda dei segnali PCM

- Secondo la condizione di Nyquist, la banda del segnale PCM è tale che:

$$\begin{aligned} N &= 2 B T_0 \\ R &= N / T_0 \\ T_0 &= 1 \text{ sec} \\ R &= n f_s \end{aligned}$$



$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} n f_s$$

il valore minimo è ottenuto quando l'impulso associato ai dati binari è del tipo sinc(x)

il valore reale dipenderà dalla scelta degli impulsi di segnalazione, e dal particolare codice di linea utilizzato

- Per impulsi rettangolari con codice di linea NRZ unipolare o NRZ polare dimostreremo che:

Banda al primo nullo

$$B_{PCM} = R = n f_s$$



Tabella seguente

# Prestazioni di un sistema PCM con impulso rettangolare

**TABELLA 3-2 PRESTAZIONI DI UN SISTEMA PCM CON QUANTIZZAZIONE UNIFORME E SENZA RUMORE TERMICO**

Numero di livelli di quantizzazione usati, $M$	Lunghezza della parola di codice PCM, $n$ (bit)	Banda del segnale PCM (misurata in corrispondenza del primo nullo) <sup>a</sup>
2	1	$2B$
4	2	$4B$
8	3	$6B$
16	4	$8B$
32	5	$10B$
64	6	$12B$
128	7	$14B$
256	8	$16B$
512	9	$18B$
1024	10	$20B$
2048	11	$22B$
4096	12	$24B$
8192	13	$26B$
16 384	14	$28B$
32 768	15	$30B$
65 536	16	$32B$

<sup>a</sup>  $B$  è la lunghezza di banda del segnale analogico di ingresso.





# Disturbi sul segnale PCM

- ❑ **Cause dei disturbi sul segnale PCM ricevuto a destinazione**
- ❑ **distorsione da aliasing** introdotta se il segnale analogico d'ingresso non è adeguatamente limitato in banda e campionato con frequenza sufficientemente elevata
- ❑ **rumore di quantizzazione**: introdotto nel codificatore PCM a causa della quantizzazione su  $M$  livelli
- ❑ **rumore di canale**
- ❑ **interferenza intersimbolica (ISI)** dovuta ad una risposta in frequenza inadeguata del canale

## ISI: interferenza intersimbolica

se la banda del segnale PCM viene ridotta, ad esempio per effetto di una non adeguata risposta in frequenza di un qualche apparato nel sistema, gli impulsi filtrati subiranno un allungamento temporale

ciascun impulso tenderà ad invadere intervalli adiacenti

Interferenza intersimbolica



# Rapporto segnale-rumore in uscita al sistema PCM

## □ Ipotesi:

- Campionamento effettuato con la frequenza di Nyquist → Nessun rumore di aliasing
- Utilizzo di un filtro di Nyquist a ricezione → Nessun ISI

## □ Si può dimostrare che:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pkout}} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}$$

S/N tra la **potenza di picco** del segnale e la potenza media statistica totale di disturbo in uscita al sistema PCM

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}$$

S/N tra la **potenza media** del segnale e la potenza media statistica totale di disturbo in uscita al sistema PCM

dove:  $P_e$  : probabilità di errore sul bit

- Nel caso in cui anche il rumore del canale sia trascurabile, abbiamo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pkout}} = 3M^2$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = M^2$$



Tabella

# Prestazioni di un sistema PCM con impulso rettangolare

**TABELLA 3-2 PRESTAZIONI DI UN SISTEMA PCM CON QUANTIZZAZIONE UNIFORME E SENZA RUMORE TERMICO**

Numero di livelli di quantizzazione usati, $M$	Lunghezza della parola di codice PCM, $n$ (bit)	Banda del segnale PCM (misurata in corrispondenza del primo nullo) <sup>a</sup>	Rapporto Potenza segnale analogico ricevuto-Rumore di quantizzazione	
			$(S/N)_{pk, out}$	$(S/N)_{out}$
2	1	$2B$	10.8	6.0
4	2	$4B$	16.8	12.0
8	3	$6B$	22.8	18.1
16	4	$8B$	28.9	24.1
32	5	$10B$	34.9	30.1
64	6	$12B$	40.9	36.1
128	7	$14B$	46.9	42.1
256	8	$16B$	52.9	48.2
512	9	$18B$	59.0	54.2
1024	10	$20B$	65.0	60.2
2048	11	$22B$	71.0	66.2
4096	12	$24B$	77.0	72.2
8192	13	$26B$	83.0	78.3
16 384	14	$28B$	89.1	84.3
32 768	15	$30B$	95.1	90.3
65 536	16	$32B$	101.1	96.3

<sup>a</sup>  $B$  è la larghezza di banda del segnale analogico di ingresso.



# Rapporto segnale-rumore in dB

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02 n + \alpha$$

dove:

$$\alpha = \begin{cases} 4.77 & \text{per l'SNR di picco} \\ 0 & \text{per l'SNR medio} \end{cases}$$

## ❑ Regola dei 6 dB:

- Regola empirica per valutare le prestazioni di un sistema PCM
- Ipotesi:
  - non vi siano errori sui bit
  - rumore casuale: il segnale di ingresso sia sufficientemente ampio da spazzolare tutti i possibili livelli di quantizzazione

❑ Aggiungendo un bit alla parola del segnale PCM, si migliora il rapporto segnale-rumore di 6 dB



## Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

Un segnale telefonico analogico occupa all'incirca la banda da 300 a 3400 Hz (banda vocale o fonica). Volendo convertire tale segnale in formato PCM, dobbiamo per cominciare fissare una frequenza di campionamento. Il minimo valore è  $2 \times 3.4 = 6.8\text{k}$  campioni/s.

Per poter usare un filtro anti-aliasing passa-basso di costo ragionevole, si deve fissare un'estensione ragionevole della banda di transizione, e quindi è necessario sovracampionare il segnale fino a 8000 campioni al secondo.

Questa è la frequenza di campionamento standard nei sistemi telefonici digitali in Europa e negli Stati Uniti. Rappresentando ogni campione con una parola di 8 bit otteniamo una velocità di bit pari a

$$\begin{aligned} R &= (f_s \text{ campioni/s}) (n \text{ bit/campione}) \\ &= (8\text{k} \text{ campioni/s}) (8 \text{ bit/campione}) = 64 \text{ kbit/s} \end{aligned} \quad (3-19)$$



## Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

Sempre secondo il teorema di dimensionalità, la banda minima necessaria a trasmettere questo segnale PCM binario è (3-15a)



$$(B)_{\min} = \frac{1}{2}R = 32 \text{ kHz} \quad (3-20)$$

Tale banda necessita dell'uso di un impulso tipo  $(\sin x)/x$  nel segnale digitale binario. Usando al contrario impulsi rettangolari, la banda è in teoria infinita, e in pratica può essere quantificata nella banda al primo nullo:

$$B_{\text{PCM}} = R = 64 \text{ kHz} \quad (3-21)$$

La banda del segnale PCM è in questo caso pari a 64 kHz, quando la banda lorda (cioè considerando anche la zona di transizione del filtro anti-aliasing) del segnale telefonico analogico originale è pari a 4 kHz!



# Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3M^2$$

Usando la (3-17a), osserviamo che il SNR di **picco** è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3(2^8)^2 = 52.9 \text{ dB} \quad (3-22)$$

L'aggiunta di un eventuale bit di parità non modifica naturalmente il rumore di quantizzazione. Il bit di parità è un tipo di codifica a protezione d'errore che può servire a diminuire il numero di errori provocati dal rumore di canale o dall'ISI. Nell'esempio, questi effetti sono stati comunque trascurati perché si è ipotizzato  $P_e = 0$ .



# Applicazione del PCM a sistemi audio ad alta fedeltà

- ❑ Nei sistemi audio ad alta fedeltà, i segnali audio sono registrati in PCM
- ❑ Per avere un S/N medio di 90 dB [vedi tabella 3-2 precedente], necessitiamo di parole PCM di  $n=15$  bit
- ❑ Se supponiamo che il segnale analogico abbia una banda  $B=20$  kHz

Banda al primo nullo  $\rightarrow B_{PCM} = 2 \cdot 20 \text{ kHz} \cdot 15 = 600 \text{ kHz}$

$B_{PCM} = R = n f_s$

The diagram shows the calculation of the PCM bandwidth. A box labeled 'Banda al primo nullo' points to the equation  $B_{PCM} = 2 \cdot 20 \text{ kHz} \cdot 15 = 600 \text{ kHz}$ . The terms  $f_s$  and  $n$  are highlighted in yellow boxes above the equation, and the values 20 kHz and 15 are highlighted in red boxes. Below the main equation, the formula  $B_{PCM} = R = n f_s$  is shown in a blue box.

- ❑ Anche se l'espansione di banda è notevole, raramente gli apparati analogici superano un S/N medio di 70 dB!!!

Il PCM utilizzato ad esempio per i compact disc (CD) audio



PCM a 16 bit con frequenza di campionamento 44.1 kHz





# Quantizzazione non uniforme

## □ Proprietà dei segnali vocali analogici:

- **Distribuzione delle ampiezze non uniforme:** i valori vicino allo zero si presentano con maggiore probabilità rispetto a quelli agli estremi della dinamica permessa
- quindi, il rumore di granularità può rivelarsi un problema serio

Soluzione:

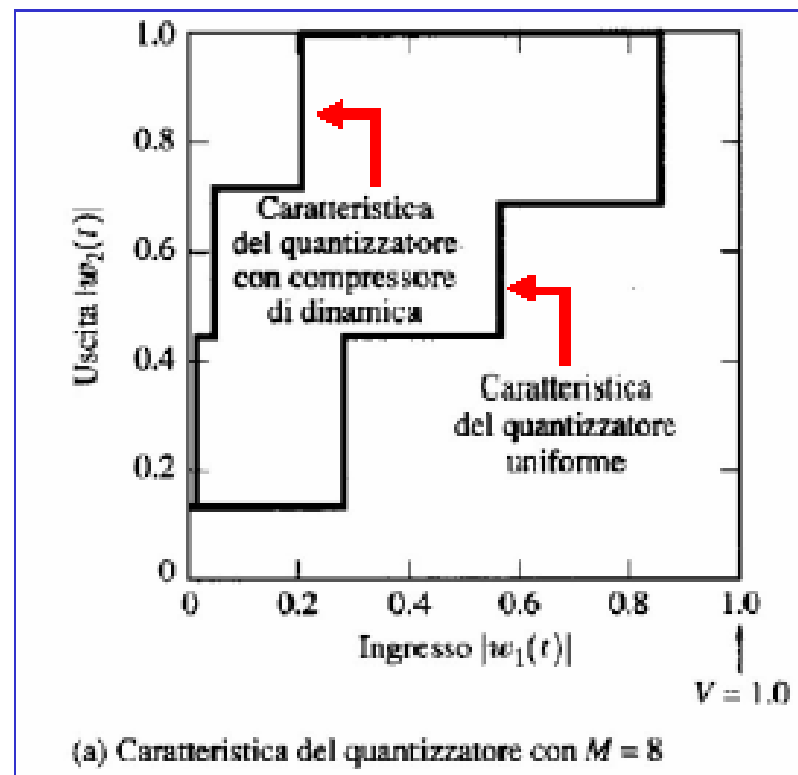
QUANTIZZAZIONE NON UNIFORME

Utilizzo di un passo di quantizzazione piccolo per valori dell'ampiezza vicini allo zero, e grande per valori maggiori



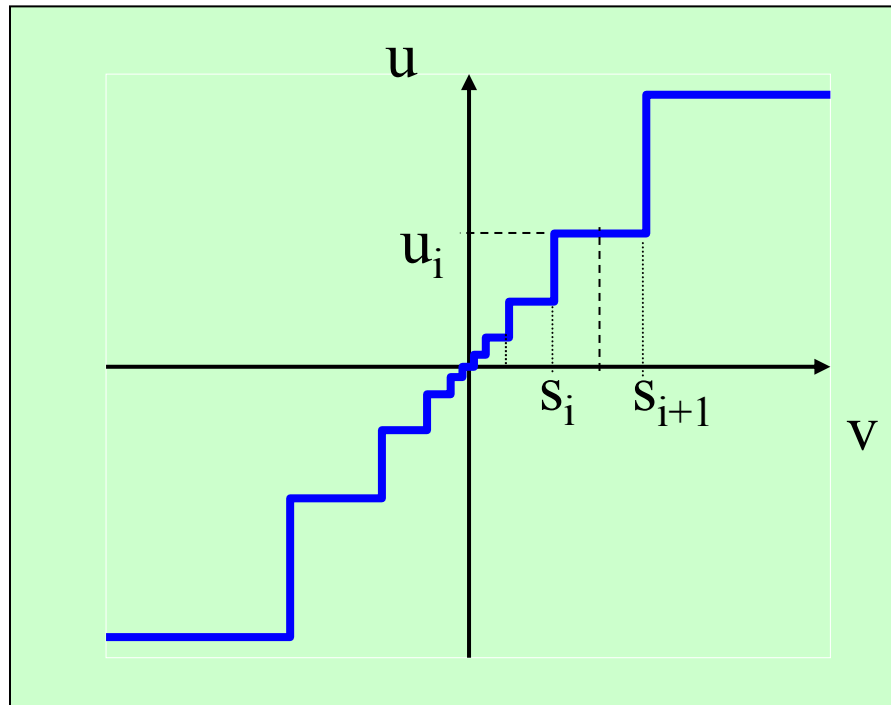
# Tecnica equivalente (utilizzata nella pratica)

- ❑ **Definizione: Compressore**
- ❑ dispositivo non lineare con amplificazione decrescente al crescere dell'ampiezza del segnale
- ❑ **Lo stesso risultato della quantizzazione non uniforme si ottiene:**
  - elaborando dapprima il segnale analogico con un compressore
  - e poi codificando il segnale in uscita dal compressore con un circuito PCM standard e quantizzazione uniforme





# Quantizzatori non uniformi



Sono utilizzati quando

- 1) la statistica del segnale in ingresso non è uniforme per minimizzare l'errore quadratico medio
- 2) la sensibilità percettiva dipende dall'ampiezza del segnale



# Compressione a legge $\mu$

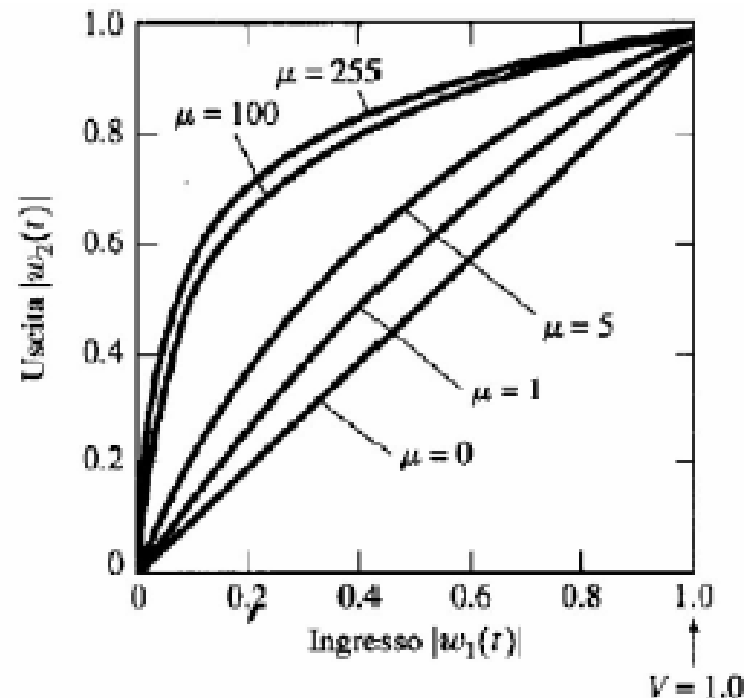
$$|w_2(t)| = \frac{\ln(1 + \mu \cdot |w_1(t)|)}{\ln(1 + \mu)}$$

## □ dove:

- il segnale  $w_1(t)$  è normalizzato al valore di picco nell'intervallo  $(-1, +1)$
- $\mu$  è un parametro positivo

## □ Nota:

- $\mu=0$  corrisponde alla quantizzazione uniforme (amplificazione lineare)
- Aumentando  $\mu$  il grado di compressione aumenta (non-lineare)
- Il valore  $\mu=255$  è utilizzato nelle reti telefoniche nord-americane e giapponesi
- In Europa si utilizza la legge di compressione A



(b) Caratteristica del compressore di dinamica  $\mu$ -law

# Compressione a legge A (in Europa)

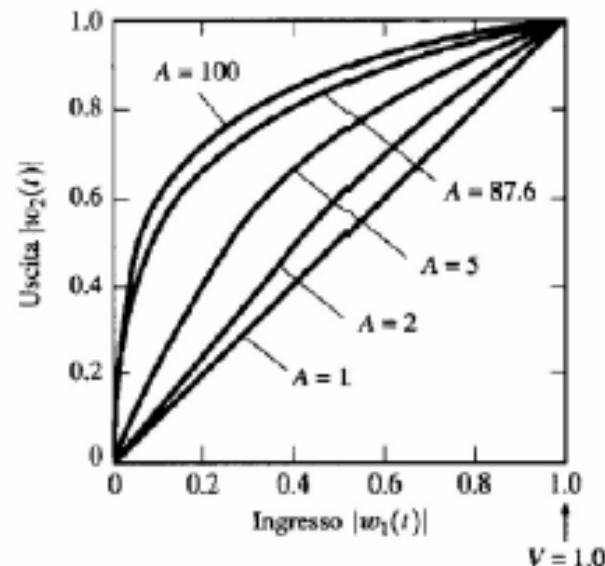
$$|w_2(t)| = \begin{cases} \frac{A \cdot |w_1(t)|}{1 + \ln(A)} & 0 \leq |w_1(t)| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln(A \cdot |w_1(t)|)}{1 + \ln(A)} & \frac{1}{A} < |w_1(t)| \leq 1 \end{cases}$$

## □ dove:

- il segnale  $w_1(t)$  è normalizzato al valore di picco nell'intervallo  $(-1, +1)$
- $A$  è un parametro positivo

## □ Nota:

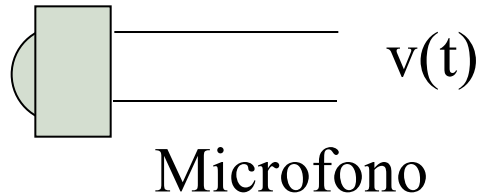
- L'implementazione è ancora lineare a tratti con 16 livelli di quantizzazione per corda
- Stavolta lo stesso passo  $\Delta$  è utilizzato nelle corde 1 e 2; per le altre corde si procede al raddoppio successivo, come per la legge  $\mu$



(c) - Caratteristica del compressore di dinamica A-law

# Applicazione: quantizzazione non uniforme

Segnale Telefonico



Banda **300-3400 Hz**

Frequenza di campionamento  **$f_c=8\text{kHz}$**

Utilizziamo  **$N=8$**  bit per campione

Bit Rate: **64Kbit/s** ( $8 \text{ Kcamp/s} \cdot 8 \text{ bit/campione}$ )

Potenza del segnale fortemente dipendente dal parlatore

Nell'ipotesi di segnale con distribuzione d'ampiezza uniforme nell'intervallo  $[-V, +V]$ , la potenza di segnale è  $P_1 = V^2/3$ .

Se si utilizza una quantizzazione uniforme ( $\Delta = 2V/2^N$ ),  $P_Q = \Delta^2/12$ , dunque

$$(P_1 / P_Q)_{\text{dB}} = \text{SNR}_{\text{dB}} = 6N = 6 \cdot 8 = 48 \text{ dB}$$

Sufficiente per buona qualità segnale ( $>30\text{dB}$ ).

Fissato il passo di quantizzazione  $\Delta$ , se la potenza del segnale  $P_s$  diminuisce di un fattore 100 ( $P_s = P_1 - 20 \text{ [dB]}$ ), cosa normalissima,

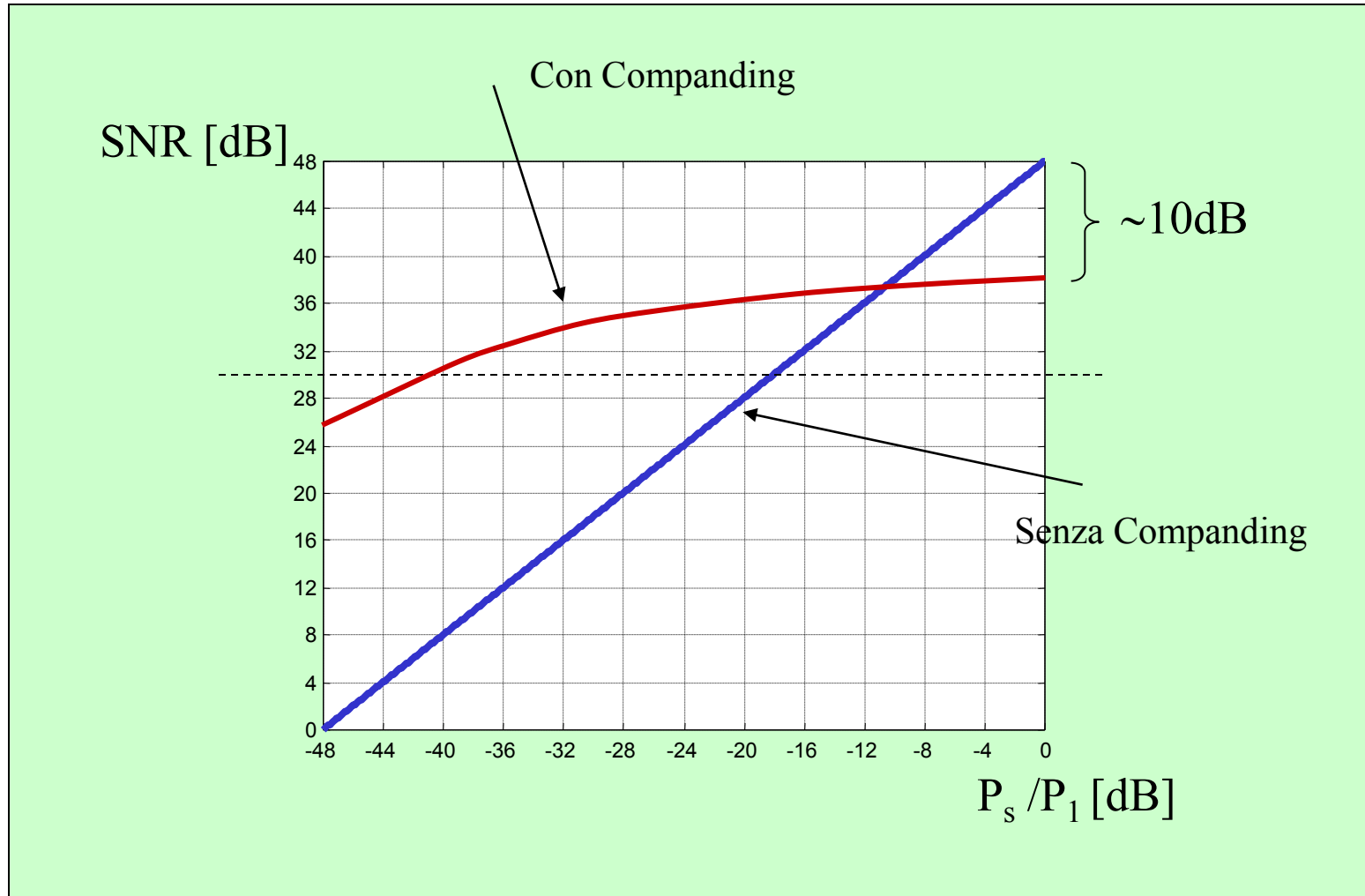
$$\text{SNR}_{\text{dB}} \approx 28\text{dB} < 30\text{dB}.$$



# Rapporto segnale-rumore in ricezione

- ❑ **Il ricevitore deve effettuare l'operazione di espansione:**
  - decompressione con una legge reciproca di quella in trasmissione
- ❑ **L'operazione di companding (compressing/expanding) ha lo scopo di aumentare il rapporto segnale-rumore**

# Componding (Compression-Expanding)







# Modem PCM V.90 56-kbit/s

## □ Il modem per PC di tipo V.90:

- trasmette dati alla velocità di 56 kbit/s via rete telefonica commutata
- usa un segnale analogico su doppino in rame
- il segnale viene pre-quantizzato con codificatore a legge A
- il clock del modem viene sincronizzato con quello a 8 kHz del codificatore PCM di centrale, in modo da catturare i livelli di quantizzazione agli istanti corretti
- per non trasmettere livelli troppo vicini tra loro (alta vulnerabilità) vengono usati solo **64 livelli positivi** e **64 negativi** (solo 7 degli 8 bit della parola PCM) per una velocità di bit di 56 kbit/s



# Modem PCM V.90 56-kbit/s

- il rapporto segnale-rumore minimo per avere 56 kbit/s è 51.1 dB [formula di Shannon sulla capacità del canale]

$$C = 56 \text{ kbit/s}$$

$$B = 3.3 \text{ kHz}$$

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

$$S/N = 10 \log_{10} (2^{C/B} - 1) = 51.084$$

$B$  : larghezza di banda del canale in  $Hz$

$S/N$  : rapporto segnale-rumore (in scala lineare, e non in dB)  
all'ingresso del ricevitore

I dati trasmessi sono proprio i bit che identificano il livello di quantizzazione



# Modem PCM V.90 56-kbit/s

- ❑ **Svantaggio: deve essere connesso ad una linea di trasmissione dati digitale**
- ❑ **Cause di riduzione di velocità di trasmissione:**
  - Rumore sulla linea telefonica tale che il **rapporto segnale-rumore è inferiore a 51.1 dB**
  - Connessione diretta modem-modem su **linea analogica** (cioè non linea dati digitale):
  - il segnale analogico prodotto con modem V.90 non può essere inviato su di una linea telefonica commutata tradizionale (analogica) per traffico vocale per connessione diretta ad un altro modem, anche se V.90
  - in tal caso infatti il segnale del modem verrebbe RICONVERTITO in digitale da un codificatore PCM standard di centrale per segnali vocali, che non sarebbe sincronizzato con il clock del PCM originario
- ❑ **In tali casi:**
  - il modem commuta su di un modo di funzionamento non PCM
  - V.34 a 28 kbit/s
  - V34bis a 33.6 kbit/s