



Corso di Sistemi Telematici A.A. 2014-2015

Lezione 8: SEGNALI IN BANDA PASSANTE E MODULAZIONI II



Modulazione d'angolo

□ Modulazione d'angolo (o angolare)

- Inviluppo complesso:

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}$$

- Il modulo dell'inviluppo complesso è costante

$$R(t) = |g(t)| = A_c$$

- La fase è una funzione lineare del segnale modulante $m(t)$
- Complessivamente $g(t)$ è una funzione non lineare del segnale modulante $m(t)$
- Il segnale modulato in angolo risulta:

$$s(t) = A_c [\cos (\omega_c t + \theta(t))]$$

- **La modulazione di fase e la modulazione di frequenza sono due casi particolari di modulazione angolare**



Modulazione di fase e di frequenza

□ Modulazione di fase (PM - Phase Modulation)

- la fase istantanea è proporzionale al segnale modulante:

$$\theta(t) = D_p m(t)$$

- la costante D_p :
 - sensibilità di fase del modulatore
 - misurata rad/V, se il segnale $s(t)$ è una tensione

□ Modulazione di frequenza (FM - Frequency Modulation)

- la fase istantanea è proporzionale all'integrale del segnale modulante:

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma$$

□ la costante D_f :

- deviazione di frequenza
- misurata (rad/s)/V, se il segnale $s(t)$ è una tensione



Relazione PM / FM

$$\text{PM: } \theta(t) = D_p m_p(t)$$

$$\text{FM: } \theta(t) = D_f \int_{-\infty}^t m_f(\sigma) d\sigma$$

- Un segnale PM modulato da $m_p(t)$ è anche FM, modulato da una diversa forma d'onda $m_f(t)$:

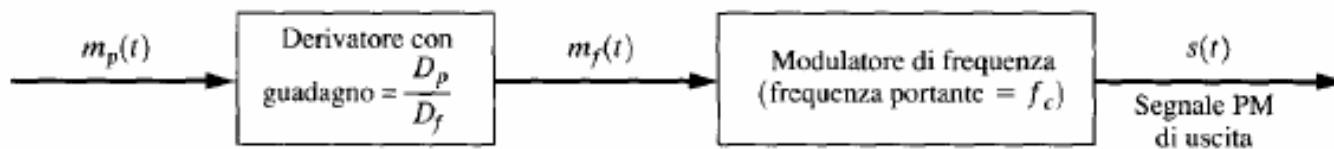
$$m_f(t) = \frac{D_p}{D_f} \frac{d}{dt} m_p(t)$$

$$m_p(t) = \frac{D_f}{D_p} \int_{-\infty}^t m_f(\sigma) d\sigma$$

- Quindi:

- si può utilizzare un modulatore PM per realizzare un modulatore FM, pre-filtrando il segnale modulante con un derivatore

Generazione di un segnale PM utilizzando un modulatore FM



(b) Generazione di un segnale PM utilizzando un modulatore di frequenza



Frequenza istantanea

- Per un segnale modulato angolarmente possiamo scrivere:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \theta(t)] = A_c \cos\left[2\pi\left(f_c t + \frac{1}{2\pi}\theta(t)\right)\right] = A_c \cos[2\pi f_i(t) \cdot t]$$

dove:

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t)$$

- Definizione:

- **Frequenza istantanea** di un segnale modulato: frequenza presente in un particolare istante

Attenzione:

Non confondere con il **concetto di frequenza** utilizzato nell'**analisi armonica** di un segnale: frequenze complessivamente contenute in tutto l'andamento del segnale *su tutto l'asse dei tempi*



Deviazione di frequenza

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t)$$

Deviazione di frequenza dalla frequenza portante

$$f_d(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{dt} \theta(t) \right]$$

Deviazione di frequenza di picco

$$F = \max \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t) \right\}$$

Deviazione di frequenza picco-picco

$$\Delta F_{pp} = \max \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{dt} \theta(t) \right] \right\} - \min \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{dt} \theta(t) \right] \right\}$$

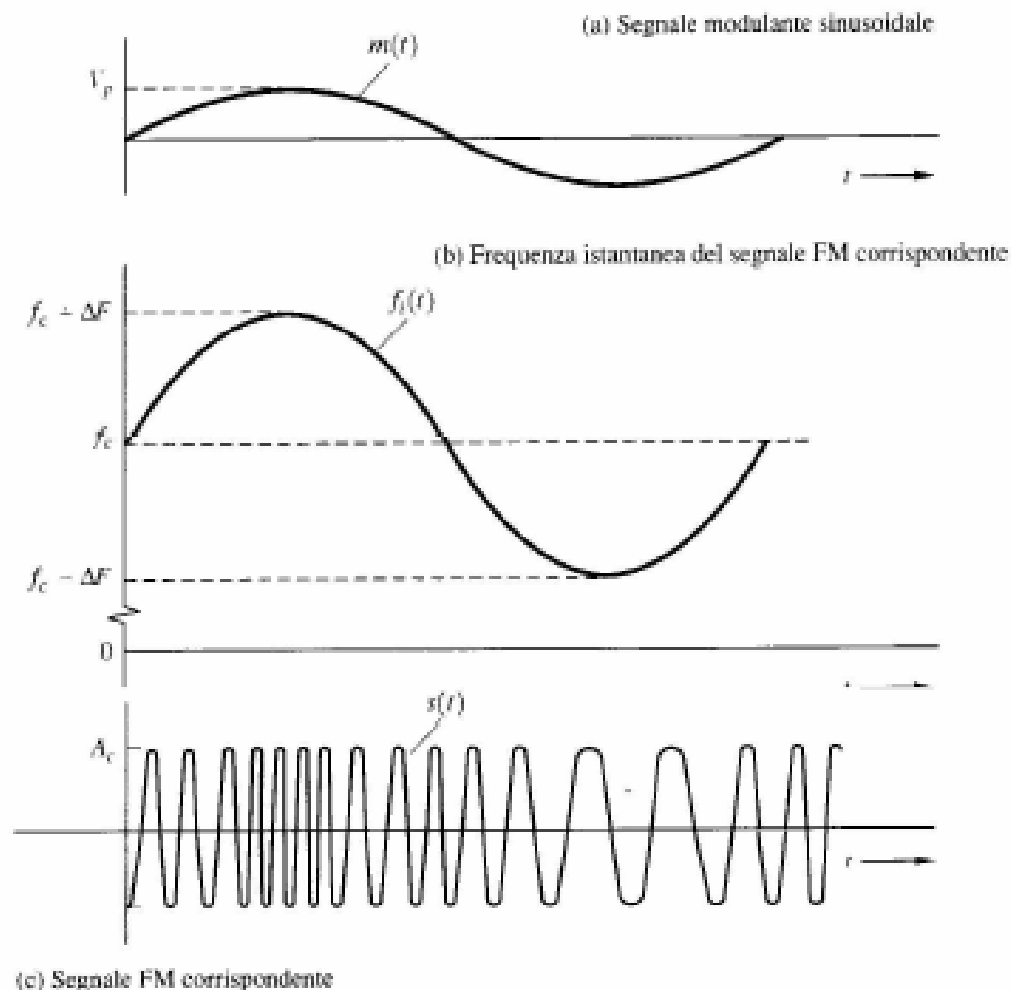
■ **Per un segnale FM:**

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p$$

dove: $V_p = \max\{m(t)\}$



Segnale FM con modulazione sinusoidale in banda base





Analisi della modulazione di frequenza

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p$$

Se aumenta l'ampiezza del segnale modulante, V_p



Aumento della deviazione, ΔF



Aumento della banda del segnale FM



La potenza media rimane però costante, e pari a

$$P = \frac{A_c^2}{2}$$

Aumentando V_p , le componenti spettrali vicino alla frequenza portante decrescono in ampiezza

Cominciano a comparire frequenze sempre più lontane

Nota: comportamento differente da quello della modulazione AM, dove il segnale modulante influenza la potenza del segnale modulato, ma non la banda



Deviazione di fase

□ Definizione:

- **Fase istantanea** di un segnale modulato: fase presente in un particolare istante

$$\theta(t)$$

Deviazione di fase rispetto alla fase nulla

$$\theta(t)$$

Deviazione di fase di picco

$$\Delta\theta = \max\{\theta(t)\}$$

- **Per un segnale PM:**

$$\Delta\theta = D_p V_p$$

dove: $V_p = \max\{m(t)\}$



Indici di modulazione angolare

□ Definizione:

○ Indice di modulazione di fase:

$$\beta_p = \Delta\theta$$

○ Indice di modulazione di frequenza:

» dove:

$$\beta_f = \frac{\Delta F}{B}$$

» banda del segnale modulante : B

» deviazione di frequenza di picco : ΔF

□ Nota:

○ Se il segnale modulante è sinusoidale di frequenza f_m



$$B = f_m$$

○ Dimostreremo che modulazioni PM ed FM con segnale modulante sinusoidale con stessa deviazione di frequenza di picco



$$\beta_f = \beta_p$$



Spettro dei segnali modulati d'angolo

□ Spettro:

$$S(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \quad \text{dove: } G(f) = \mathfrak{I}\{g(t)\} = \mathfrak{I}\{A_e e^{j\theta(t)}\}$$

- Per i segnali modulati d'angolo, $g(t)$ è una funzione non lineare di $m(t)$
 - Non esiste una formula semplice e generale che mette in relazione $G(f)$ e $M(f)$, come per l'AM



- La teoria dipende dal particolare tipo di segnale
- Non vale il principio di sovrapposizione: lo spettro FM relativo alla somma di due segnali NON È uguale alla somma dei due spettri



Esempio: spettro di un segnale PM o FM con modulazione sinusoidale (1/4)

Cominciamo con la PM con modulante sinusoidale:

$$m_p(t) = A_m \sin \omega_m t \quad (5-51)$$

Allora

$$\theta(t) = \beta \sin \omega_m t \quad (5-52)$$

dove $\beta_p = D_p A_m = \beta$ è l'indice di modulazione di fase.

CALCOLI:

$$V_p = A_m$$



$$\theta(t) = D_p m(t) = D_p A_m \sin \omega_m t$$



$$\theta(t) = \beta_p \sin \omega_m t$$

$$\text{PM: } \beta_p = \Delta\theta \quad \Delta\theta = D_p V_p$$

Esempio: spettro di un segnale PM o FM con modulazione sinusoidale (1/4)

Otterremmo la stessa funzione $\theta(t)$ per una FM con segnale modulante

$$m_f(t) = A_m \cos \omega_m t \quad (5-53)$$

se ponessimo $\beta = \beta_f = D_f A_m / \omega_m$. In questo caso, la deviazione di frequenza di picco sarebbe $\Delta F = D_f A_m / 2\pi$.

$$\theta(t) = \beta \sin \omega_m t$$

CALCOLI:

$$V_p = A_m \quad \hookrightarrow \quad B = f_m$$

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma = \frac{D_f A_m}{\omega_m} \sin \omega_m t$$

$$\text{FM: } \beta_f = \frac{\Delta F}{B}$$

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p$$



$$\beta_f = \frac{D_f A_m}{2\pi f_m}$$



Esempio: spettro di un segnale PM o FM con modulazione sinusoidale (2/4)

L'involuppo complesso del segnale modulato è

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}$$

$$\theta(t) = \beta \sin \omega_m t$$

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = A_c e^{j\beta \sin \omega_m t} \quad (5-54)$$

che è periodico di periodo $T_m = 1/f_m$. Di conseguenza, si può espandere $g(t)$ in serie di Fourier:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_m t} \quad (5-55)$$

Inserire la formula 5-56

Esempio: spettro di un segnale PM o FM con modulazione sinusoidale (3/4)

Poniamo: $\theta = \omega_m t$

$$c_n = \frac{A_c}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} (e^{j\beta \sin \omega_m t}) e^{-jn\omega_m t} dt$$

Otteniamo: $dt = \frac{T_m}{2\pi} d\theta$

$$t = \frac{T_m}{2} \rightarrow \theta = \omega_m \cdot \frac{T_m}{2} = \frac{2\pi}{T_m} \cdot \frac{T_m}{2} = \pi$$

$$t = -\frac{T_m}{2} \rightarrow \theta = -\omega_m \cdot \frac{T_m}{2} = -\frac{2\pi}{T_m} \cdot \frac{T_m}{2} = -\pi$$

$$c_n = A_c \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \theta - n\theta)} d\theta \right] = A_c J_n(\beta)$$

Questo integrale, noto come **funzione di Bessel del primo tipo di ordine n** , non può essere espresso in forma chiusa, ma deve essere valutato numericamente. Alcuni valori di $J_n(\beta)$ sono riportati in Tabella 5-1; maggiore precisione si può ottenere consultando Abramovitz a Stegun [1964] o usando MATLAB.

Si dimostra che: $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$ \Rightarrow $c_{-n} = c_n$

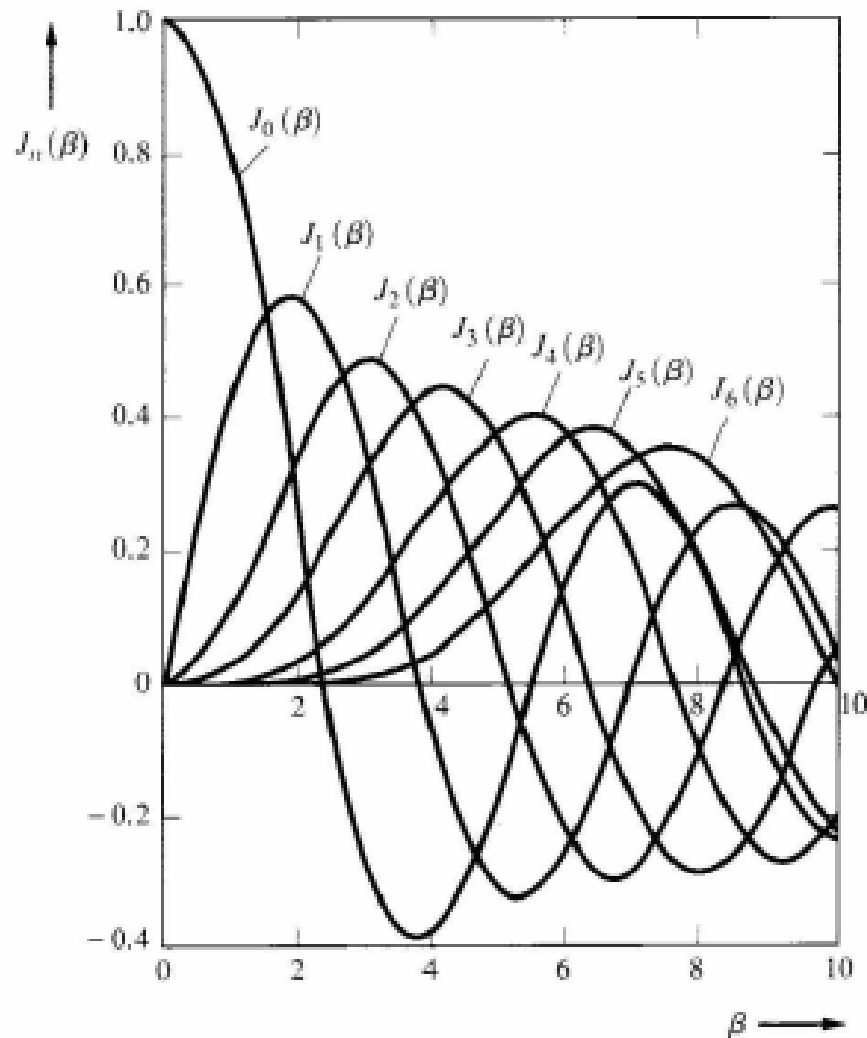
Valori delle funzioni di Bessel $J_n(\beta)$

$\beta \backslash n$	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.9385	0.7652	0.2239	-0.2601	-0.3971	-0.1776	0.1506	0.3001	0.1717	-0.09033	-0.2459
1	<u>0.2423</u>	0.4401	0.5767	0.3391	-0.06604	-0.3276	-0.2767	-0.004683	0.2346	0.2453	0.04347
2	0.03060	<u>0.1149</u>	0.3528	0.4861	0.3641	0.04657	-0.2429	-0.3014	-0.1130	0.1448	0.2546
3	0.002564	0.01956	<u>0.1289</u>	0.3091	0.4302	0.3648	0.1148	-0.1676	-0.2911	-0.1809	0.05838
4		0.002477	0.03400	<u>0.1320</u>	0.2811	0.3912	0.3576	0.1578	-0.1054	-0.2655	-0.2196
5			0.007040	0.04303	<u>0.1321</u>	0.2611	0.3621	0.3479	0.1858	-0.05504	-0.2341
6			0.001202	0.01139	0.04909	<u>0.1310</u>	0.2458	0.3392	0.3376	0.2043	-0.01446
7				0.002547	0.01518	0.05338	<u>0.1296</u>	0.2336	0.3206	0.3275	0.2167
8					0.004029	0.01841	0.05653	<u>0.1280</u>	0.2235	0.3051	0.3179
9						0.005520	0.02117	0.05892	<u>0.1263</u>	0.2149	0.2919
10						0.001468	0.006964	0.02354	0.06077	<u>0.1247</u>	0.2075
11							0.002048	0.008335	0.02560	0.06222	<u>0.1231</u>
12								0.002656	0.009624	0.02739	0.06337
13									0.003275	0.01083	0.02897
14									0.001019	0.003895	0.01196
15										0.001286	0.004508
16											0.001567

\emptyset



Funzioni di Bessel per $n=0, \dots, 6$



$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$



Esempio: spettro di un segnale PM o FM con modulazione sinusoidale (4/4)

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_m t} \quad c_n = A_c J_n(\beta)$$

Applicando la TF alla (5-55) si ottiene

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta(f - nf_m) \quad (5-59)$$

e cioè

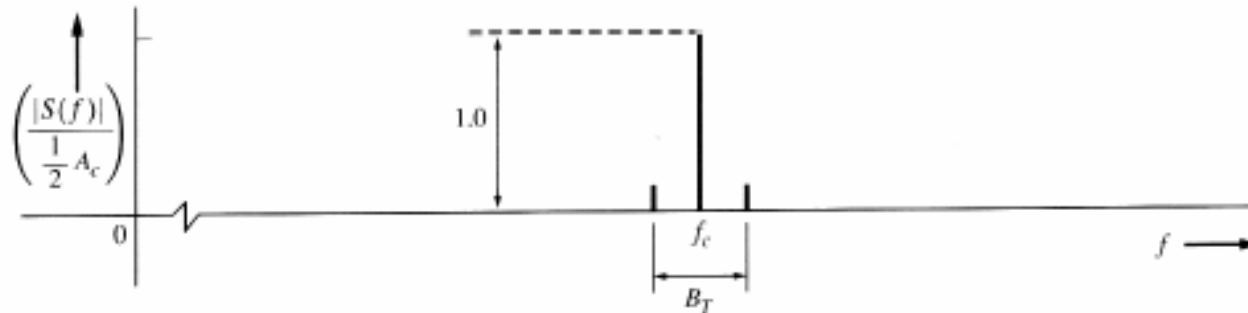
$$G(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta) \delta(f - nf_m) \quad (5-60)$$

per cui si può ricavare dalla (5-49) la TF del segnale modulato d'angolo con segnale modulante sinusoidale.

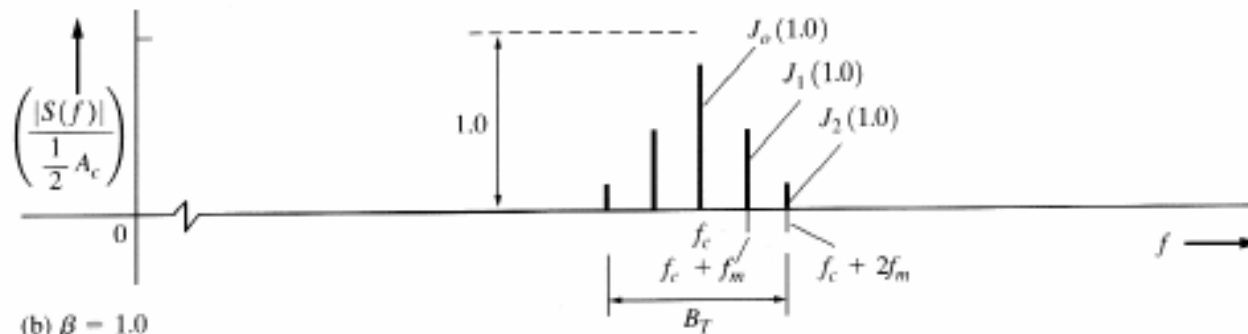
$$S(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \quad (5-49)$$



Modulo dello spettro per $f > 0$ nell'esempio precedente



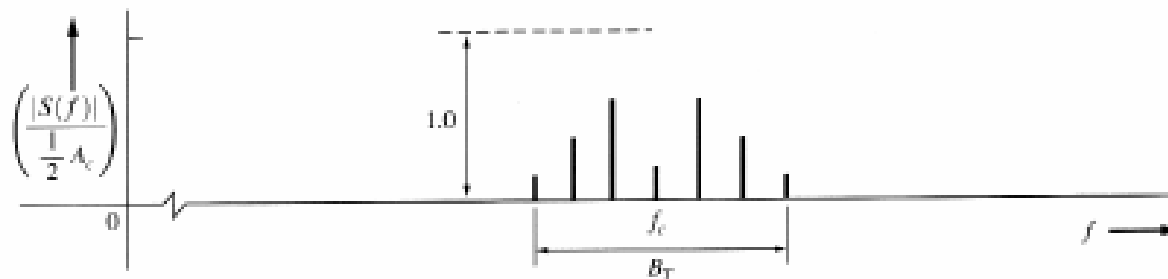
(a) $\beta = 0.2$



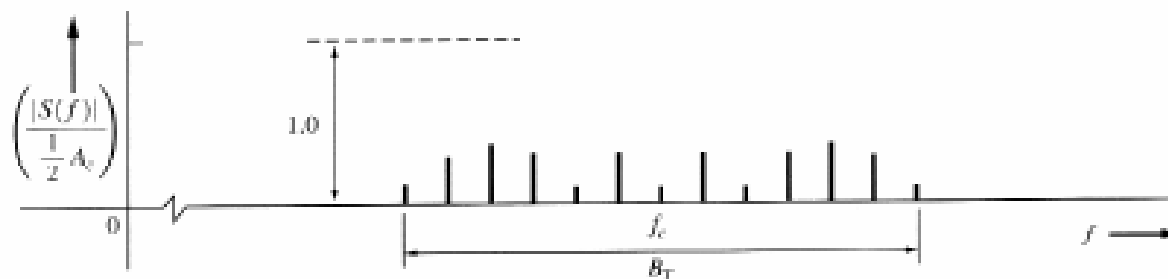
(b) $\beta = 1.0$

La componente alla frequenza portante è proporzionale a $|J_0(\beta)|$;
e conseguentemente, il livello della portante dipende dall'indice di modulazione. In
particolare, per $\beta = 2.40, 5.52$ e così via (Tab. 5-2) tale componente si *annulla*.

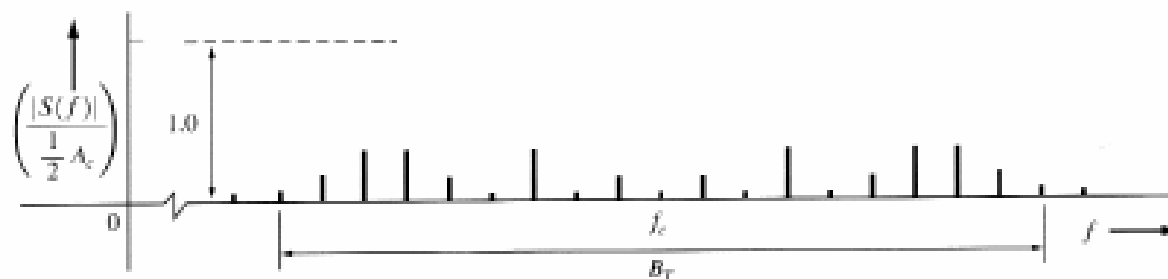
Modulo dello spettro per $f > 0$ nell'esempio precedente



(c) $\beta = 2.0$



(d) $\beta = 5.0$



(e) $\beta = 8.0$



Regola di Carson per il calcolo della banda

□ Abbiamo notato che:

- La banda di un segnale modulato d'angolo dipende da b e da f_m .

□ Regola di Carson:



- Il 98% della potenza totale è contenuta nella banda:

$$B_T = 2(\beta + 1)B$$

- dove:

- β : indice di modulazione di fase o quello di frequenza
- B : banda del segnale modulante

□ Fornisce un'indicazione di massima per valutare la banda di un segnale PM o FM (con modulante anche non sinusoidale, purchè a banda limitata)



Valori delle funzioni di Bessel $J_n(\beta)$

$\beta \backslash n$	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.9385	0.7652	0.2239	-0.2601	-0.3971	-0.1776	0.1506	0.3001	0.1717	-0.09033	-0.2459
1	0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	-0.06604	-0.3276	-0.2767	-0.004683	0.2346	0.2453	0.04347
2	0.03060	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	0.04657	-0.2429	-0.3014	-0.1130	0.1448	0.2546
3	0.002564	0.01956	0.1289	0.3091	0.4302	0.3648	0.1148	-0.1676	-0.2911	-0.1809	0.05838
4		0.002477	0.03400	0.1320	0.2811	0.3912	0.3576	0.1578	-0.1054	-0.2655	-0.2196
5			0.007040	0.04303	0.1321	0.2611	0.3621	0.3479	0.1858	-0.05504	-0.2341
6			0.001202	0.01139	0.04909	0.1310	0.2458	0.3392	0.3376	0.2043	-0.01446
7				0.002547	0.01518	0.05338	0.1306	0.2336	0.3206	0.3275	0.2167
8					0.004029	0.01841	0.05653	0.1280	0.2235	0.3051	0.3179
9						0.005520	0.02117	0.05892	0.1263	0.2149	0.2919
10						0.001468	0.006964	0.02354	0.06077	0.1247	0.2075
11							0.002048	0.008335	0.02560	0.06222	0.1231
12								0.002656	0.009624	0.02359	0.06337
13									0.003275	0.01083	0.02897
14									0.001019	0.003895	0.01196
15										0.001286	0.004508
16											0.001567

\emptyset

...

...

Componenti rientranti nella banda di Carson



Zeri delle funzioni di Bessel

Valori di β quando $J_n(\beta) = 0$

TABELLA 5-2 ZERI DELLE FUNZIONI DI BESSEL: VALORI DI β QUANDO $J_n(\beta) = 0$

	Ordine della funzione di Bessel, n						
	0	1	2	3	4	5	6
β per il primo zero	2.40	3.83	5.14	6.38	7.59	8.77	9.93
β per il secondo zero	5.52	7.02	8.42	9.76	11.06	12.34	13.59
β per il terzo zero	8.65	10.17	11.62	13.02	14.37	15.70	17.00
β per il quarto zero	11.79	13.32	14.80	16.22	17.62	18.98	20.32
β per il quinto zero	14.93	16.47	17.96	19.41	20.83	22.21	23.59
β per il sesto zero	18.07	19.61	21.12	22.58	24.02	25.43	26.82
β per il settimo zero	21.21	22.76	24.27	25.75	27.20	28.63	30.03
β per l'ottavo zero	24.35	25.90	27.42	28.91	30.37	31.81	33.23

NOTA: per questi valori di β , la componente alla frequenza portante è nulla



Conclusione: proprietà dei segnali modulati d'angolo

- ❑ Un segnale modulato d'angolo è una funzione non lineare del segnale modulante
- ❑ La banda aumenta con l'indice di modulazione
- ❑ Il livello della componente in corrispondenza della frequenza portante cambia in funzione dell'indice di modulazione, e può essere anche nullo
- ❑ L'ampiezza dell'involuppo di un segnale modulato d'angolo è costante, e non dipende dal livello del segnale modulante