

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA (P.S.D.)

La PSD lega la potenza normalizzata di una f. d'o. con la sua descrizione nel dominio della frequenza; è molto utile per descrivere come il contenuto informativo in potenza sia modificato per effetto di filtri e altri dispositivi, propri dei sistemi di comunicazione. La PSD è molto più utilizzata della ESD nei tipici problemi di telecomunicazioni.

Definiamo la versione troncata di una f. d'o.:

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t), & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{else} \end{cases} = g(t) \pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

La potenza media normalizzata è:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} g_T^2(t) dt$$

e, applicando il teorema di Parseval:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} \right) df,$$

ovviamente $g_T(t) \leftrightarrow G_T(f)$.

L'integrando a destra è ciò che definiamo PSD:

$$S_g(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} \quad [W \cdot Hz]$$

N.B.: La PSD assume sempre valori reali non negativi e trascura gli effetti sulla fase.

Ora si hanno due strade per il calcolo della potenza media normalizzata di un segnale: $\langle g^2(t) \rangle$

e $\int_{-\infty}^{+\infty} P_g(f) df$.

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

La funzione di autocorrelazione di una f. d'o. reale è:

$$R_g(\tau) \triangleq \langle g(t) g(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) g(t+\tau) dt$$

Per il teorema di WIENER-KHINTCHINE la funzione di autocorrelazione e la PSD della stessa f. d'o. sono una coppia di trasformate di Fourier: $R_g(\tau) \longleftrightarrow P_g(f)$, cioè $P_g(f) = F[R_g(\tau)]$. In questo modo si ha una via in più per il calcolo della PSD:

$$P_g(f) = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} \\ \mathcal{F}[R_g(\tau)] \end{cases}$$

da cui si può calcolare la potenza normalizzata in 4 modi diversi:

$$P = \begin{cases} \langle g^2(t) \rangle \\ G_{rms}^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} P_g(f) df \\ R_g(0) \end{cases}$$

Dall'ultima espressione si può notare come si ricade nella prima se si pone $\tau=0$ nella definizione di funzione di autocorrelazione.

CENNI ALLE SERIE DI FOURIER

La serie di Fourier è una particolare rappresentazione in serie tramite funzioni ortogonali (sinusoidi o esponenziali complesse), molto utile nei problemi di ingegneria delle comunicazioni. Usando le funzioni esponenziali complesse del tipo:

$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$, con $n = (-\infty, +\infty)$, $\omega_0 = 2\pi f_0$ e $T_0 = b-a$ (intervallo sul quale la serie è valida).

Una f. d'o. fisica (energia finita) può essere rappresentata su un intervallo $a \leq t < a+T_0$ tramite la serie complessa esponenziale di Fourier:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

dove i fasori complessi C_n si calcolano come:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

2 funzioni sono ortogonali in (a,b) se:

$$\int_a^b g_1(t) g_2^*(t) dt = 0$$

Nel caso di f. d'o. periodiche, il valore del parametro a è arbitrario e di solito si sceglie $a=0$ oppure $a=-T_0/2$. La frequenza $f_0 = 2\pi/\omega_0$ è detta frequenza fondamentale e nf_0 è l'ennesima armonica con $n > 1$.

Se $g(t)$ è periodica di periodo T_0 , lo spettro della f. d'o. è $G(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nf_0)$. Una funzione periodica ha sempre uno **spettro a linee**, centrate nei multipli di f_0 (nf_0) e pesate con C_n . Se una funzione è non periodica, avrà uno spettro continuo. Se $g(t)$ è periodica, si definiscono:

$$P = \langle g^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \quad \text{potenza normalizzata} \quad P_g(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0) \quad \text{PSD}$$

ESERCIZIO

Calcoliamo la PSD di $g(t) = A \sin \omega_0 t$ mediante il metodo indiretto (ovvero calcoliamo la $R_g(\tau)$ e poi la ritrasformiamo):

$$R_g(\tau) = \langle g(t) g(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin \omega_0 t \sin \omega_0 (t+\tau) dt$$

Sfruttando $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ si ottiene:

$$R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} [\cos(-\omega_0 \tau) - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A^2}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) dt =$$

$$\Rightarrow R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \cos \omega_0 \tau \cdot \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dt}_{=T} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) dt}_{=0} =$$

$$\Rightarrow R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau = \boxed{\frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau}$$

Per calcolare la PSD si deve trasformare secondo Fourier, per cui:

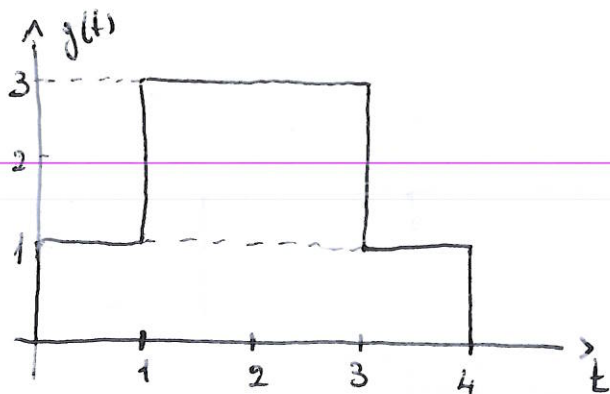
$$P_g(f) = \mathcal{F}\left[\frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau\right] = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Ricordando che $P = \langle g^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P_g(f) df$, allora: $P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] df = \frac{A^2}{2}$

come noto dal calcolo temporale: $P = \langle g^2(t) \rangle = G_{rms}^2 = (A/\sqrt{2})^2 = A^2/2$

ESEMPIAZIO :

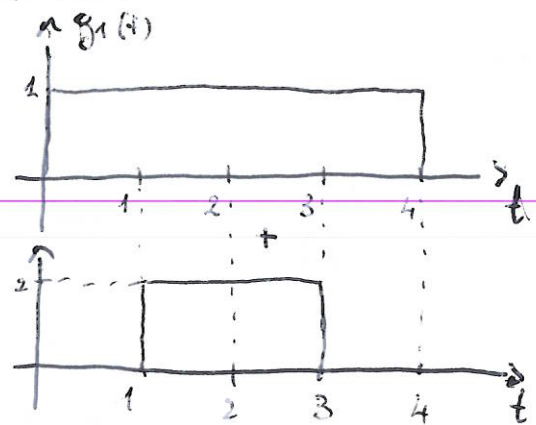
Voluto la TF della funzione $g(t)$ rappresentata :



$$g_1(t) = \pi \left(\frac{t-2}{4} \right)$$

$\downarrow \mathcal{F}$

$$G_1(f) = 4 \operatorname{sinc}(\pi f 4) e^{-j\omega 2}$$



$$g_2(t) = 2 \pi \left(\frac{t-2}{2} \right)$$

$\downarrow \mathcal{F}$

$$G_2(f) = 2 \cdot 2 \operatorname{sinc}(\pi f 2) e^{-j\omega 2}$$

$$G(f) = G_1(f) + G_2(f) \Rightarrow G(f) = 4 [\operatorname{sinc}(4\pi f) + \operatorname{sinc}(2\pi f)] e^{-j4\pi f}$$

ESEMPIAZIO (XCASA) :

$$\mathcal{F} \left[\begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 1 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \right]$$

$$R. \frac{e^{-(\alpha + j2\pi f)}}{\alpha + j2\pi f} = G(f)$$

ESEMPIAZIO :

Calcolare la trasformata di Fourier di $g(t) = \begin{cases} At, & 0 < t < T_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} At e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{\alpha t} dt \quad \text{con } \alpha = -j\omega = -j2\pi f, \text{ ricordando}$$

$$\text{che: } \int t e^{\alpha t} dt = e^{\alpha t} \left(\frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \text{ si ottiene:}$$

$$G(f) = A \left[e^{-j\omega t} \left(\frac{t}{-j\omega} - \frac{1}{-\omega^2} \right) \right]_0^{T_0} = A e^{-j\omega T_0} \left(\frac{T_0}{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2} \right) - \left(\frac{A}{\omega^2} \right) = A e^{-j\omega T_0} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{jT_0}{\omega} \right) - \frac{A}{\omega^2}$$

$$\text{con } \omega = 2\pi f$$

(19)

ESEMPI 10: Dato il segnale $g(t)$ con TF: $G(f) = \frac{j2\pi f}{1+j2\pi f}$, trovare $X(f)$ per i seguenti segnali:

a) $x(t) = g(2t+2)$: si usa la proprietà di traslazione temporale e di cambiamento di scala: $g(t-T_d) \rightarrow G(f)e^{-j2\pi f T_d}$ e $g(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} G(f/a)$, per cui: $X(f) = \frac{1}{2} \frac{j\pi f}{1+j\pi f} \cdot e^{+j\frac{4\pi f}{2}}$

b) $x(t) = e^{j\pi t} g(t-1)$: si usa la proprietà di traslazione in frequenza: $g(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} \leftrightarrow G(f-f_c)$ con $f_c=1$ nel caso b); $X(f) = \frac{j2\pi(f-1)}{1+j2\pi(f-1)}$

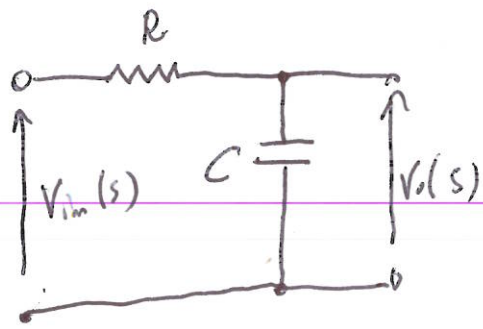
c) $x(t) = 2 \frac{d g(t)}{dt}$: ci serve la proprietà di derivazione: $\frac{d g(t)}{dt} \rightarrow G(f)(j2\pi f)$
 $X(f) = 2 \cdot \frac{j2\pi f}{1+j2\pi f} \cdot j2\pi f = -2 \frac{4\pi^2 f^2}{1+j2\pi f} = -\frac{8\pi^2 f^2}{1+j2\pi f}$

ESEMPI 11:

Dato $g(t) = 5 + 12 \cos \omega_0 t$ con $f_0 = 10 \text{ Hz}$, calcolare $R_g(\tau)$ e $P_g(f)$, dalla definizione: $R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(t) g(t+\tau) dt$, cioè:

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (5 + 12 \cos \omega_0 t) (5 + 12 \cos \omega_0 (t+\tau)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [25 + 60 \cos \omega_0 (t+\tau) + \\ &+ 60 \cos \omega_0 t + 144 \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t+\tau)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot 25 \int_{-T/2}^{+T/2} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} 60 \cos \omega_0 (t+\tau) dt \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} 60 \cos \omega_0 t dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot 144 \int_{-T/2}^{+T/2} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t+\tau) dt = \underbrace{\hspace{10cm}} \\ &= 25 + \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} 72 \cos(-\omega_0 \tau) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} 72 \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) dt \right] = \\ &= 25 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot 72 \cos \omega_0 \tau \int_{-T/2}^{+T/2} dt = \underbrace{72 \cos \omega_0 \tau + 25}_{\text{"a"}} \Rightarrow P_g(f) = 25\delta(f) + \frac{72}{2} \cdot \underbrace{(2)}_{\cdot [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]} \end{aligned}$$

Derivazione delle forme di trasferimento (senza distorsione)



$$C \Rightarrow q = C V \Rightarrow \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt} \Rightarrow \boxed{I = C \frac{dV}{dt}}$$

$$I \Rightarrow \Phi = L i \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{V = L \frac{di}{dt}}$$

$$\Rightarrow i(t) = C \frac{dV(t)}{dt} [C]$$

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} [I]$$

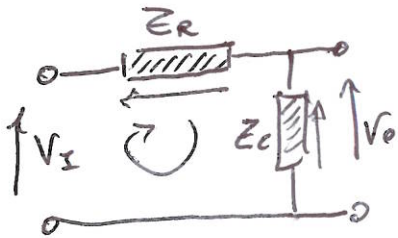
$$\mathcal{F}[i(t)] = C j\omega V(f) = I(f) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[V(t)] = L j\omega I(f)$$

$$I = C \cdot j\omega V \quad (\text{condensatore}) \quad \text{e} \quad V = L \cdot j\omega I$$

$$V = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{impedenza}}}{Z} I \Rightarrow Z = \frac{V}{I}$$

$$c) Z_C = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$1) Z_L = \frac{V}{I} = j\omega L$$



$$\Rightarrow V_I - V_R - V_C = 0 \Rightarrow V_I = V_R + V_C$$

$$V_R = Z_R I \quad \text{e} \quad V_C = Z_C I$$

$$V_R = R I \quad V_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot I$$

$$V_I = R I + \frac{1}{j\omega C} I = I \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)$$

$$V_O = V_C = Z_C \cdot I = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{V_I}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

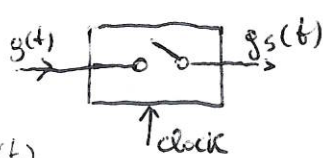
$$\Rightarrow H \Rightarrow \frac{V_O}{V_I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} V_I}{\left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot V_I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{j\omega R C + 1}}$$

CONVERSIONE A/D IN BANDA BASE

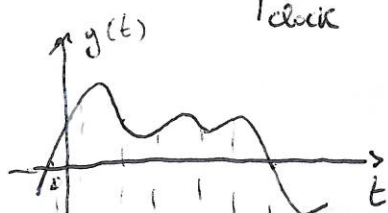
PAM consiste nella conversione ~~di~~ impulsi di un segnale analogico, la cui ampiezza rappresenta l'informazione ed è la prima fase per la trasformazione digitale dei segnali; in pratica si costruisce un treno d'impulsi (modulati poiché l'ampiezza varia) contenente l'informazione del segnale di partenza;

Sia $g(t)$ un segnale analogico a banda limitata B ; il segnale PAM ottenuto con campionamento naturale (tramite una porta logica) è:



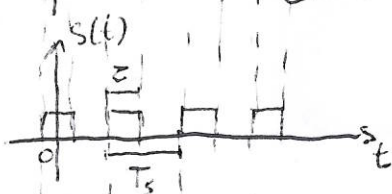
$$g_s(t) = g(t) s(t)$$

$$\text{con } s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_s}{\tau}\right)$$



in cui $T_s = \frac{1}{f_s}$ e $f_s \geq 2B$ frequenza di Nyquist

Quindi $s(t)$ è un treno d'impulsi di durata τ e traslati di kT_s

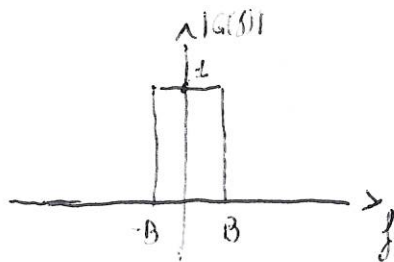


$$G_s(f) = d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi n d}{\pi n d} G(f - n f_s)$$

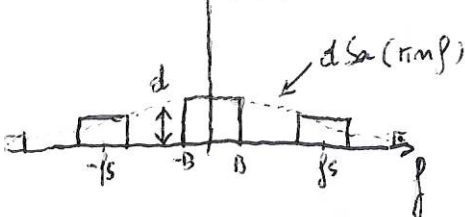
in cui d è detto fattore di duty cycle (duty cycle) ed è $d = \tau / T_s$ e $G(f)$ è lo spettro della forma d'onda originale.

Lo spettro del segnale analogico viene replicato sui multipli di f_s (proprietà del campionamento). In ricezione il segnale è filtrato e riportato al giusto livello tramite un guadagno di amplificazione.

Se $f_s < 2B$ si avrebbero sovrapposizioni delle varie repliche (aliasing)



$$|G_s(f)|$$



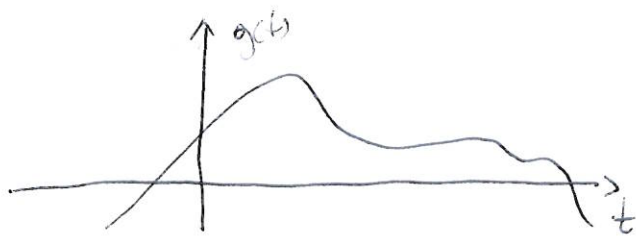
Un altro modo di ottenere il segnale campionato è quello di impiegare un campionamento istantaneo:

$$g_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT_s) h(t - kT_s)$$

$h(t)$ è la forma dell'impulso campionario.

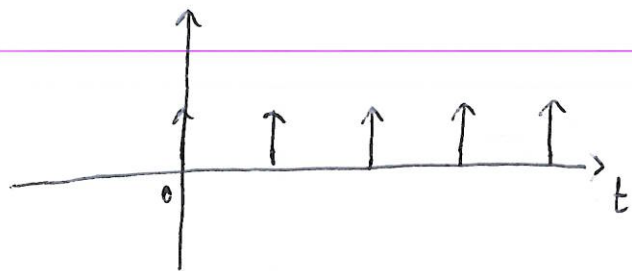
$$\text{con } h(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$\text{con } \tau = T_s$$



Per il campionamento istantaneo vale:

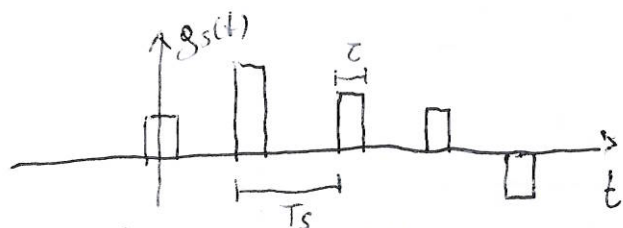
$$G_{Ts}(f) = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - k f_s)$$



Con $H(f) = T_s \text{Sa}(\pi T_s f)$.

Praticamente il segnale PAM ora consiste d'impulsi istantanei agli istanti $t = kT_s$.

Tale segnale è ottenibile da circuiti quali "sample & hold". Anche in questo caso si hanno delle repliche nello spettro.



! N.B.: La FORMA DI $h(t)$ può essere π o Sa solo nel campionamento istantaneo. La PAM non è usata in telecomunicazioni visto che gli impulsi durano troppo poco (banda necessaria elevata rispetto a quella originale).

MODULAZIONE CON CODICE A IMPULSI (PCM)

L'informazione contenuta in un campione del segnale analogico è rappresentata attraverso "parole di codice" digitali; se si hanno a disposizione n bit per la codifica, si potranno avere $M = 2^n$ codici differenti, ognuno associato a un diverso livello d'ampiezza del segnale: il valore $g(kT_s)$ è rimpiazzato dal valore più vicino fra gli M permessi. Il segnale PCM è ottenuto in 3 passi distinti: campionamento, quantizzazione e codifica. L'errore massimo di quantizzazione è pari alla metà del passo di quantizzazione (rumore di quantizzazione). In genere si usa il codice di Gray perché ogni parola differisce dalla precedente per un solo bit.

Il bit rate (codice di bit) risulta: $R = n f_s$, se n è il numero di bit che rappresentano il codice (parola). La banda occupata dipende sia da R che dal formato dell'impulso elementare usato a rappresentare i dati; vale:

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} n f_s$$

e la minima banda è ottenuta quando l'impulso associato è $\sqrt{\frac{2 \ln 2}{\pi}} \times$.

In fase di ricezione, il segnale ricostruito PCM sarà affetto da errore (di quantizzazione e di canale). Per impulsi rettangolari: $B_{PCM} = R = n f_s$ al 5° livello.

Il rapporto tra potenza di picco del segnale e la potenza media statistica totale di disturbo in uscita dal sistema PCM è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{pre-out} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}$$

Il termine 1 tiene conto dell'errore di quantizzazione e l'altro termine del m. di quant.

mentre il rapporto tra la potenza media di segnale e la pot. media di rumore è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}$$

in cui $M = 2^n$ e P_e è la probabilità di errore sul bit nel flusso dati per la PCM ricostruito il ricevitore e inviato al DAC. Se la P_e può essere ridotta, la si può trascurare, ottenendo $3M^2$ ed M^2 per le due espressioni.

In dB le espressioni per $P_e = 0$ sono: $\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 6.02n + d$, con $d = 4.77$ per il caso di picco e $d = 0$ per il caso medio. Questa formula dà una regola empirica

- la regola dei 6dB: aggiungendo un bit alle parole PCM si migliora il rapporto S/N di 6dB

ESERCIZIO

Un segnale occupa la banda tra 300 Hz e 3400 Hz; vogliamo stabilire le caratteristiche PCM e effettuare una trasformazione digitale; in particolare si deve trovare le f_s :

$$f_{smin} = 2 \cdot B = 2 \cdot 3400 = 6800 \text{ campioni/sec}$$

Si può trovare, ad esempio, $f_s = 8 \text{ Ksamples/sec}$. Supponiamo di voler usare $m = 8$, avremo:

$$R = m \cdot f_s \left[\frac{\text{samples}}{\text{sec.}} \cdot \frac{\text{bit}}{\text{samples}} \right] = 8 \cdot 8000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}} = 64 \text{ Kbit/s}$$

Quindi la banda minima (usando impulsi di tipo $\sin x/x$) è:

$$B_{min} = \frac{1}{2} R = 32 \text{ KHz}$$

Usando impulsi rettangolari

$$B_{PCM} = R = 64 \text{ KHz} \quad \left(\begin{array}{l} B_{PCM} = m \cdot f_s \\ \text{divisa da } 8 \cdot 8000, \text{ appena} \end{array} \right)$$

nonché eccede la banda totale del segnale analogico)

B) DATO UN SEGNALE DI BANDA 3200 Hz, ~~DESSA~~ LO SI VUOLE CONVERTIRE IN PCM USANDO $f_s = 7000$ samples/s E QUANTIZZATORE A 64 LIVELLI. SI IPOTIZZA UNA PROB. DI ERRORE IN RESISTIONE DI 10^{-4} .

CALCOLARE:

a) LA BANDA DEL SEGNALE PCM (IMPULSI RETTANGOLARI):

$$M=64 \Rightarrow m=6 \Rightarrow R=m \cdot f_s = 6 \cdot 7000 = 42 \text{ kbps} \Rightarrow \boxed{B=R=42 \text{ kHz}}$$

b) RAPPORTO S/N MEDIO: $\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{M^2}{1+4(M^2-1)P_e} = 1552,7$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10 \log_{10} 1552,7 \approx 32 \text{ dB}$$

c) SEGNALE DI BANDA 4.2 MHz DA CONVERTIRE IN PCM e $\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pu}} \text{ dB}$ DI ALMENO 55 dB. CALCOLARE:

a) med M (Si suppone $P_e=0$) $\Rightarrow 55 = 6.02m + 4.77 \Rightarrow m = \lceil 8.343 \rceil = 9 \text{ bit}$
da cui $M = 2^9 = 512$;

b) VELOCITA' DI TRASMISSIONE: sic $f_s = 2B = 2 \times 4.2 \times 10^6 = 8.4 \times 10^6 \text{ samples/s}$
da cui $R = m \cdot f_s = 9 \cdot 8.4 \times 10^6 = 75.6 \text{ Mbps}$

c) $B_{\text{PCM}} = R = 75.6 \text{ MHz}$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pu aut}} = \frac{3M^2}{1+4(M^2-1)P_e}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out avg}} = \frac{\pi^2}{1+4(M^2-1)P_e}$$

se $P_e \rightarrow 0$ $\begin{cases} 6.02m + 4.77 \\ 6.02m + 4.77 \end{cases} \left(\begin{matrix} \text{in} \\ \text{dB} \end{matrix} \right)$