



Teoria dell'Informazione e Applicazioni – a.a. 2014-2015

Esercizi su **Codifica** dei segnali (Hamming coding)

03-11-2014
Ing. P. Fazio

Fac-simile (codici a ripetizione)

- Sia data la parola di informazione $p = \text{"1010100101"}$ che viene trasmessa su un canale ideale dopo essere stata elaborata con un codificatore $\mathbf{R(3,1)}$. Valutare le performance della trasmissione (in termini di correttezza della parola ricevuta) per la parola codificata e non codificata. La stessa parola e lo stesso blocco codificatore vengono utilizzati per una trasmissione su un canale non ideale con percentuale di errore pari al 30% (si ipotizzano errori casuali e indipendenti). Effettuare, anche in questo caso, la stessa valutazione di performance, mostrando un esempio di parola di codice ricevuta all'ingresso del decodificatore, indicata con c e come essa viene decodificata. Qual è il numero di errori rilevabili e correggibili per il codificatore in questione? Mostrare la codifica di p con il codice $\mathbf{P(6,5)}$, insieme al numero di errori rilevabili e correggibili. Dimostrare quanto appena scritto.

HAMMING CODES (3,1) (7,4) (15,11)

⑥

SI TRATTA DEI CODICI LINEARI, CAPACI DI RIVELARE 3 ERRORI SINGOLI E CORRIGERLI SOLO 2 ERRORI SINGOLI. IN CONTRASTO AI CODICI A CONTROLLO DI PARITÀ RIESCE ANCHE A IDENTIFICARE LA POSIZIONE DELL'ERRORI.

RICORDANDO CHE $m = k + q$, OGNUNA DELLE 2^k PAROLE DI INFORMAZIONE, HA m PAROLE DI CODICE ERRATE A DISTANZA 1, OTTENUTE VARIANDO 1 BIT ALLA VOLTA NELLA PAROLA ORIGINARIA. SE UN CODICE HA N INFORMAZIONI DISTINTE IN BINARIO SI DEVE AVERE UNA PAROLA DI m BIT, TALE CHE $2^m \geq N$ (VALE $m = \lceil \log_2 N \rceil$)

IL CODICE IN QUESTIONE È UN (7,4) ^{(7,4) STANDARD}, CHE INDECHIAMA CON H(7,4). I BIT/10551

SONO DISPOSTI IN MANIERA ALTERNATA, IN PARTICOLARE I BIT DI CONTROLLO OCCUPANO LE POSIZIONI POTENZE DI 2

$m=7$

1	2	3	4	5	6	7
C	C	P	C	P	P	P

OGNI BIT DI CONTROLLO DEVE
GARANTIRE LA PARITÀ DEI BIT

	1	2	3	4	5	6	7
1	0		0		0		0
2		0	0			0	0
4				0	0	0	0

DATA LA PAROLA

1 0 1 1 , DISTINGUE IL CODICE DI MATEMATICHE

1) → SISTEMI 1 BIT

2) POSIZ. BIT 1 a 0
PER PAROLA SU SEQUENZA
1357

3) POSIZ. BIT 2 a 1
PER PAROLA SU SEQUENZA
2367

4) POSIZ. BIT 4 a 0
PER PAROLA SU SEQUENZA
4567

DATA LA PAROLA
CODIFICATA

BIT 6 MATRICE

1	2	3	4	5	6	7
●		1		0	1	1

0	1
---	---

0					
0	1	1	0	0	1 1

0 1 0 0 0 1 1 , SI INDIVIDUA IL

ESPANDENDO TUTTE LE PAROLE DI CODICE:

$0000 \rightarrow 0000000$
 $0001 \rightarrow 0101001$
 $0010 \rightarrow 0100101$
 \vdots

$1111 \rightarrow 1111111$

LA CODIFICA SI PUÒ RAPPRESENTARE NELLA FORMA:

$$C = PG \quad [c_1 \dots c_n] = [p_1 \dots p_k] \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \dots & g_{kn} \end{bmatrix}$$

ESEMPIO PRECEDENTE:

$$[1011] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0110011] \text{ OK}$$

⑦

SI OSSERVA CHE TUTTE LE PAROLE DI CODICE CONTENGONO ALMENO TRE 1, QUINDI LA MINIMA DISTANZA DI HAMMING È 3,

DA CUI

$$d = d_{\min} - 1 = 2 \quad t = \frac{d_{\min} - 1}{2} =$$

↑

RISOLUTIVA

↑

CORRETTIVA

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	1	0	1	0	0	1
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	DIT	CONTROLLATI					(MAGGIORI A K)

MATRICE DI PARITÀ

LE REGOLE PER IL CONTROLLO DELLA PARITÀ POSSONO ESSERE SCRITTE IN FORMA MATRICIALE :

$$CH = 0$$

SE NON CI SONO ERRORI, IL PRODOTTO TRA IL CODICE E LA
MATRICE DI PARITÀ H RESTITUISCE UN VETTORE Nullo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NEL CASO DI STRINGA ERRATA:

(8)

$$[0 \ 10 \ 00 \ 11] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ROSTRO DINTTO
 INDINTTO
 (CONSULTARSI LA
 TABELLA DEI CONTROLLI)

SINDROME

TRASMESSO IL CODICE, SI RICEVÈ LA m-ple: $y = c + e$, DA CUI SI PUÒ CALCOLARE LA SINDROME:

$$s = yH = cH + eH = [0] + eH = \underline{\underline{eH}}$$

ESEMPLO)

PROGETTARE LA MATRICE DI PARITÀ DEL CODICE $H(15,11)$:

$$m=15 \quad k=11 \quad q=4$$

- 1) non deve essere 0000
- 2) non deve essere colonne uguali

columns 00000

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
 C₁ C₂ P₁ C₃ P₂ P₃ P₄ C₄ P₅ P₆ P₇ P₈ P₉ P₁₀ P₁₁

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	T
	*	*		*				*								
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
4	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
8	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1

CODIFICARE LA PAROLA DI INFORMAZIONE :

9

$$p = [00101100111]$$

1) METODO MANUALE

SI BASA SUL CALCOLO DELLA PARITA' IN BASE ADH

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1		
	1	0		0			1								

$$c = [10001011100111]$$

2) MATRICES GENERATRICES :

$$C = pG$$

$$[0010110011] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) PER CASA: VALUTARE cH E VERIFICARE CHE RISULTI NEL VETTORE NULO

4) VALUTARE LA SINDROME PER $c = [101001011100111]$

$$[101001011100111] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10)

○ GUARDANDO NELLA MATRICE APPARENTE QUALCUNA CONFIGURAZIONE INTERESSA SOLTANTO III e IV BIT DI CONTROLLO.