



# Teoria dell'Informazione e Applicazioni – a.a. 2014-2015

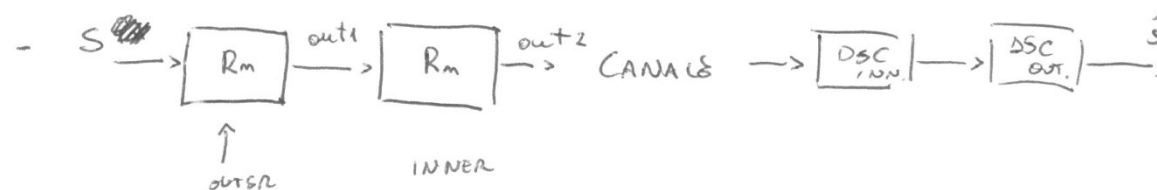
Esercizi su **Codifica** dei segnali (cod. concatenati e confronti)

27-10-2014  
Ing. P. Fazio

## CONCATENAZIONE DI CODICI

(5)

- COSTRUIRE CODICI LUNGI PARTENDO DA CODICI CORTI (PIÙ FACILE DA IMPLEMENTARE)
- CODIFICA PIÙ SEMPLICE E MINORI COMPLESSITÀ RISPETTO ALL'EQUIVALENTE



$S = 01101$   $R_5^2$

out<sub>1</sub>    0000 1111 1111 0000 1111

out<sub>2</sub>    0---0 1---1 1---1 0---0 1---1

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{25} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{25} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{25} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{25} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{25}$

$\alpha = 0,1$

→ ottimizzare ancora la formula semplificata (leading order)

$$P_e^1(3,5) = \binom{5}{3} \alpha^3 = \frac{5!}{3!2!} \alpha^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} \alpha^3 = 10 \alpha^3 = 10 \cdot (0,001) = 0,01 = 10^{-2}$$

$$P_e^2(3,5) = \binom{5}{3} (0,01)^3 = 10 \cdot (0,01)^3 = \boxed{10^{-5}}$$

NSL CASO DI COMPLICAZIONE  $R_{25}$

$$P_e(13,25) = \binom{25}{13} \alpha^{13} = \frac{25!}{13!12!} = \boxed{5,2 \cdot 10^{-7}}$$

MORE ROBUST

COMPARISON!

ES. PER CASO)

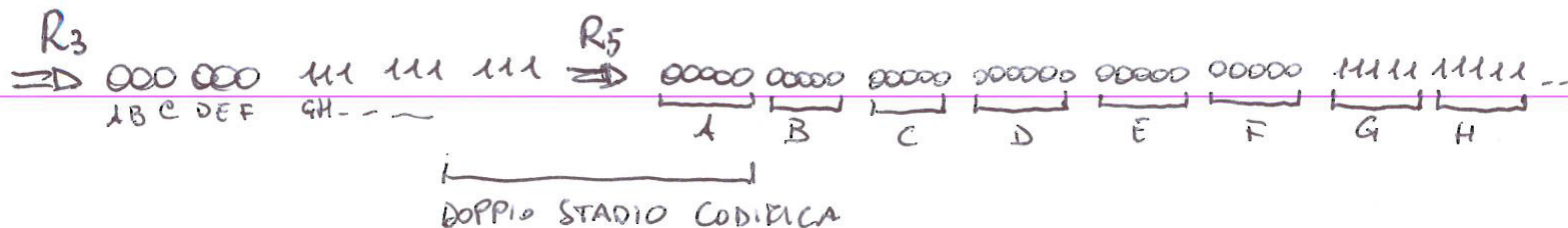
VALUTARE  $P_e$  CON  $R_3^2$  o  $R_9$ , EFFETTUARE IL CONFRONTO

# ESEMPI 10)

(11)

1.a) CODIFICARE CON CODICE  $R_3-R_5$  LA PAROLA DI INFORMAZIONE:

$$p = [00\ 111]$$



1.b) STABILIRE SE SI TRASMETTE IN MANIERA EFFICIENTE TRAMITE  $R_3-R_5$  CON

$$P_b = 10^{-20}$$

I STADIO)  $P_e(R_3) = P_e(2,3) = \binom{3}{2} \alpha^2 (1-\alpha) = \frac{3!}{2!} (\alpha^2 - \alpha^3) \approx 3\alpha^2 = 3(10^{-20})^2 = 3 \cdot 10^{-40}$

II STADIO)  $P_e(R_5) = P_e(3,5) = \binom{5}{3} \alpha^3 (1-\alpha)^2 \approx \frac{5!}{2!3!} 10\alpha^3 \leftarrow \alpha = 3 \cdot 10^{-40}$

SENZA SOSTITUIRE IL VALORE DI  $\alpha$  AVBIATO, PIU' IN GENERALE:

$$P_e(R_3-R_5)_T = 3\alpha^2 \Big|_{\alpha=P_e(R_5)} = 3(10\alpha^3)^2 = 300\alpha^6$$

PIU' SI TRASMETTE IN MANIERA EFFICIENTE SE  $300\alpha^6 \leq 10^{-20}$ , CIOE' SE SI RIESCONO A MIGLIORARE LE PERFORMANCE DEL CANALE

$$\alpha \leq \sqrt[6]{\frac{10^{-20}}{300}}$$

1.e) CONFRONTO CON  $R_{15}$ :

$$P_e(R_{15}) = P_e(8, 15) = \binom{15}{8} d^8 (1-d)^7 \approx \binom{15}{8} d^8 = \frac{15!}{8! 7!} d^8 =$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} d^8 = \frac{154440}{24} d^8 \approx 6435 d^8, \text{ DATO CHE } 0 < d < 1$$

$$6435 d^8 < 300 d^6 \quad (\text{NON SAREBBE SUFFICIENTE PER } \alpha > 0,20, \text{ MA È UN VALORE INCONGRUO})$$

$R_{15}$  È PIÙ UNVIAGGIO SO INTENZIONI DI  $P_e$ , MA MCHIS DS BUFFER PIÙ LONGH  
 PER MEMORIZZARE 15 BIT, AL RISCO DI 3+5

1.f) VALUTARE UNA <sup>POSSIBILE</sup> CODIFICA CONCATENATA CHE POSSA RAPPRESENTARE UN BUON  
 TRADE-OFF TRA NUMERO DI STADI, SPAZIO OCCUPATO, PROB. DI ERRORE, CON  $P_b = 10^{-9}$   
 E  $\alpha = 0,001$

PROVATO CON:

$$-R_3 \rightarrow P_b(R_3) \approx 3d^2 = 3(0,001)^2 = 3 \cdot (10^{-3})^2 = 3 \cdot 10^{-6} > 10^{-9} \text{ NO!}$$

$$-R_5 \rightarrow P_b(R_5) \approx 10d^3 = 10(10^{-3})^3 = 10 \cdot 10^{-9} = 10^{-8} > 10^{-9} \text{ NO!}$$

$$-R_7 \rightarrow P_b(R_7) \approx \binom{7}{4} d^4 (1-d)^3 \approx \binom{7}{4} d^4 = \frac{7!}{4! 3!} d^4 = 35 (10^{-3})^4 = 35 \cdot 10^{-12} \text{ OK!}$$

(12)



VEDIAMO A DUE LIVELLI

$$P_b(R_3) = P_b(R_3) \Big|_{\alpha=P_b(R_3)} = 3\alpha^2 \Big|_{\alpha=P_b(R_3)} = 3(3\alpha^2)^2 = 27\alpha^4 \Big|_{\alpha=0.001} = 27 \cdot 10^{-12}$$

$27 \cdot 10^{-12} < 35 \cdot 10^{-12}$  ✓ MEMORIZZO GLI 8, non 7!

$$-P_3 - R_5 \Rightarrow P_6(R_3 - R_5)^2 \quad 3(10\alpha^3)^2 = 300\alpha^6$$

PSROM 220 8 bit

$-R_3 - R_3 - R_3 \Rightarrow$  SI INTRODUCES TROPPO RILANZO, QUINDI  $\exists$  CONSUMANTI  $\boxed{R_3 - R_3}$

ESE method)

ESSE ALGORITMO)  
CONDICIONAR CON CODIÇS  $R_5-R_5-R_5 (R_5^3)$  LA PALAVRA  $P = [0110101]$ :

2a) 0110101  $\xrightarrow[\text{FSR.}]{R_5}$  00000 11111 11111 00000 11111 00000 11111  $\xrightarrow{\text{FSR.}}$  00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000

---  $\xrightarrow{R_5}$  0...0 1...1 1...1 0...0 1...1 0...0 1...1  
125 125 125 125 125 125 125

2b) STABILIZES SS PJD TRANSMITTERS IN TWO EFFICIENTES SO UN CANAL SENSITIVO A BINA  
CON  $P_b = 10^{-15}$  e  $\alpha = 0.1$

$$\begin{aligned}
 P_e(R_5 - R_5 - R_5) &= 10 \alpha^3 \Big|_{\alpha=\beta} \Big|_{\beta=P_e(R_5)} = 10 \cdot (10(10\alpha^3)^3)^3 = \\
 &= 10 (10 \cdot (10.000 \alpha^9)^3) = 10 (1000 \cdot 1000^3 \alpha^{27}) \\
 &= 10 \cdot 1000^4 \alpha^{27} = 10 (10^3)^4 \alpha^{27} = \\
 &= 10 \cdot 10^{12} \alpha^{27} = 10^{13} \alpha^{27} = \\
 &= 10^{13} (10^{-1})^{27} = 10^{13} \cdot 10^{-27} = 10^{-14}
 \end{aligned}$$

$$\text{MA } 10^{-14} > 10^{-15}$$

QUINDI NON SI PUO' TRASMETT  
RE CORRETTAMENTE

2c) IPOTIZZANDO UN RITARDO MASSIMO SUPPORTATO ALLA FINE DELLA CATENA DI CODIFICA DI 14ms E UN RITARDO DI SINGOLO STADIO DI 5ms, SI SODDISFA LA SPECIFICA?

(13)

$$3 \times 5 \times 10^{-3} s = 15 \times 10^{-3} s > 14 \times 10^{-3} s$$

QUALE SCHEMA SI PUO' CONSIDERARE PER RISPETTARE IL VINCOLO SULL'ESPRONT  
E SUL RITARDO? LO SI PROGETTA CONSIDERANDO UN TRADE-OFF TRA NUMERO DI STADI  
E RITARDO DI CODIFICA.

SICURAMENTE DOVRA' AVERE 1 O 2 STADI DI CODIFICA (RITARDO =  $10 \times 10^{-3} s$ )

$$\text{— PROVA } R_3 - R_3 \Rightarrow P_e(R_3^2) = 3(3\alpha^2)^2 = 27\alpha^4 = 27 \cdot (10^{-1})^4 = 27 \cdot 10^{-4} \text{ NO!}$$

$$\text{— PROVA } R_5 - R_5 \Rightarrow P_e(R_5 - R_5) = 10(10\alpha^3)^3 = 10.000 \cdot \alpha^9 = 10000 \times 10^{-9} = 10^{-5} \text{ SI}$$

$$\text{— PROVA } R_5 - R_7 \Rightarrow P_e(R_5 \cdot R_7) = 10(35\alpha^4)^3 = 428750\alpha^{12} \approx 42 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{— PROVA } R_7 - R_7 \Rightarrow P_e(R_7 - R_7) = 35(35\alpha^4)^4 = 35^5 \cdot \alpha^{16} = 3.5^5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-16} = 3.5^5 \cdot 10^{-11} \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

$$\text{— PROVA } R_7 - R_9 \Rightarrow P_e(R_9) = \binom{9}{5} \alpha^5 (1-\alpha)^4 \approx \frac{9!}{5!4!} \alpha^5 = 126\alpha^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_e(R_7 - R_9) = 35(126\alpha^5)^4 \approx 4 \cdot 10^{-11} \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

$$\text{— PROVA } R_9 - R_9 \Rightarrow P_e(R_9^2) = 126(126\alpha^5)^5 = 126^6 \alpha^{25} \approx 4 \times 10^{12} \cdot 10^{-25} \approx 4 \times 10^{-13} \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

$$\text{— PROVA } R_{11} - R_{11} \Rightarrow P(R_{11}) = \binom{11}{6} \alpha^6 (1-\alpha)^5 \approx \frac{11!}{6!5!} \alpha^6 = 462\alpha^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_e(R_{11} - R_{11}) = 462(462\alpha^6)^6 = 462^7 \cdot \alpha^{36} \approx 4.6 \times 10^{18} \cdot 10^{-36} = 4.6 \times 10^{-18} \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

POR CASA) VERIFICAR SE POR  $\alpha = 0.01$

---