Corso di Sistemi Telematici
a.a. 2015-2016

Trasformata di Fourier (15 Ottobre 2015)

1.4 Trasformata di Fourier

Il valore di tensione (o di corrente) all'interno di un circuito varia in funzione del tempo, di conseguenza risulta d'interesse lo studio delle frequenze presenti nel circuito. Teoricamente, per valutare le frequenze presenti, bisogna analizzare la f. d'o. su tutti i tempi ($-\infty < t < +\infty$) in modo da non dimenticare alcuna componente frequenziale. Il livello relativo di ogni componente rispetto alle altre e dato dallo spettro delle tensioni (o delle correnti). Esso può essere ottenuto utilizzando la **trasformata di Fourier** della f. d'o.:

DATA la f. d'o. g(t):

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Il simbolo $\mathcal{F}$ è usato x indicare l'operazione di trasformazione e nello integrale s'introduce f come variabile della trasf.

Il risultato di questa operazione è uno spettro bilatero (a due lati), poiché dalla formula si ottengono componenti frequenziali sia negative che positive: la trasformata è il risultato di un calcolo matematico e non è fisicamente presente in alcun punto del sistema. In generale, poiché $e^{-j2\pi ft}$ è complesso, anche G(f) lo sarà, per cui potremo scrivere $G(f)=X(f)+jY(f)$ in forma cartesiana o, in forma polare, $G(f)=|G(f)|e^{j\angle G(f)}$, dove $|G(f)|=\mathrm{sqrt}(X^2(f)+Y^2(f))$ e $G(f)=\theta(f)=$ $=\arctan(Y(f)/X(f))$. Ad esempio, diremo che la frequenza f=10Hz è presente nella f. d'o. g(t) se $|G(10)|\neq 0$.

La trasformata inversa (o anti-trasformata) è:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

G(f) e g(t) costituiscono una coppia di trasformate di Fourier.

Una f. d'o. g(t) è trasformabile secondo Fourier se soddisfa entrambe le condizioni di Dirichlet:

1) g(t) è assolutamente integrabile, ovvero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt < \infty$$

2) g(t) ha un numero finito di discontinuità con valori di limite destro e limite sinistro finiti, e un numero finito di massimi e minimi in un intervallo finito di tempo.

Queste sono entrambe condizioni sufficienti ma non necessarie; una condizione sufficiente più restrittiva per l'esistenza della trasformata di F. è:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty$$

Il calcolo della TF secondo la definizione può essere difficile, ma vi sono alcune tecniche alternative che spesso aiutano nello scopo (integrazione diretta, tabella, teoremi e proprietà).

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

- linearità: $a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \longleftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$;
- simmetria spettrale dei segnali reali : se g(t) è reale $\rightarrow$ $G(-f) = G^*(f)$;

DIM:

$$G(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-2j\pi(-f)t}\, dt \quad e \quad G^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g(t)\, e^{-2j\pi f t} \right]^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt$$

ma $g^*(t) = g(t)$
poiché g(t) reale

- Corollario:

  $|G(-f)| = |G(f)|$ lo spettro dei moduli è pari

  $\theta(-f) = -\theta(f)$ lo spettro delle fasi è dispari
- cambiamento di scala: $F[g(at)] = (1/|a|)G(f/a)$;
- dualità: $G(t) \longleftrightarrow g(-f)$;
- traslazione temporale: $g(t-Td) \longleftrightarrow G(f)e^{-j2\pi fTd}$
- traslazione frequenziale: $g(t)e^{j2\pi fct} \longleftrightarrow G(f-fc)$
- area di g(t): $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = G(0)$
- area di G(f): $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\,df = g(0)$
- derivazione nel dominio del tempo: $d^n g(t)/dt^n \rightarrow (2\pi jf)^n G(f)$ con $G(0)=0$;
- integrazione nel dominio del tempo: $\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau \longrightarrow \frac{1}{2j\pi f} G(f) + \frac{1}{2} G(0)\delta(f)$
- coniugazione: $g^*(t) \rightarrow G^*(-f)$;
- moltiplicazione: $g_1(t)g_2(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda)G_2(f-\lambda)\,d\lambda = G_1(f) \circledast G_2(f)$

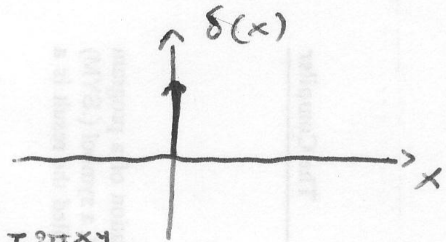
x - moltiplicazione: $g_1(t)g_2(t) \to \int_{-\infty} G_1(\lambda)G_2(f-\lambda)\,d\lambda = G_1(f) \circledast G_2(f)$

x - convoluzione: $g_1(t) \circledast g_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda)g_2(t-\lambda)\,d\lambda \to G_1(f)G_2(f)$

- g(t) pari → G(f) è reale;
- g(t) dispari → G(f) è immaginaria.

TRASFORMATE DI FOURIER NOTEVOLI :

(1) DELTA DI DIRAC $\delta(x)$:



$$\delta(x) \triangleq \begin{cases} \infty & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{e vale} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

alternativamente $\delta(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j 2\pi x y}\,dy$

Sia $w(x)$ una generica funzione continua in $x=0$, allora vale

$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\delta(x) = w(0)$, da cui deriva la proprietà campionatrice della δ:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\delta(x-x_0)\,dx = w(x_0)},$$

utile quando si devono estrarre campioni da una data funzione; da questa proprietà è immediato il calcolo della $\mathcal{F}[\delta(t)]$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \underbrace{e^{-j2\pi f t}}_{W(t)}\, dt = e^{0} = 1 = \Delta(f)}$$

la $\boxed{\text{verifica}}$ del risultato è operata grazie al calcolo della $\mathcal{F}^{-1}$:

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[\Delta(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} df = \delta(t)$$

x 3) $\boxed{\text{SINUSOIDE}}$

2010

$v(t) = A \sin \omega_0 t$, con $\omega_0 = 2\pi f_0$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$, per cui:

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt +$$

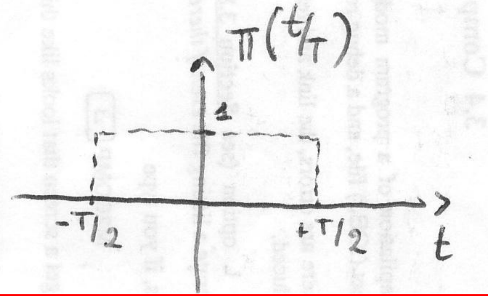
$$-\frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \Rightarrow \boxed{V(f) = j\frac{A}{2}[\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]}$$

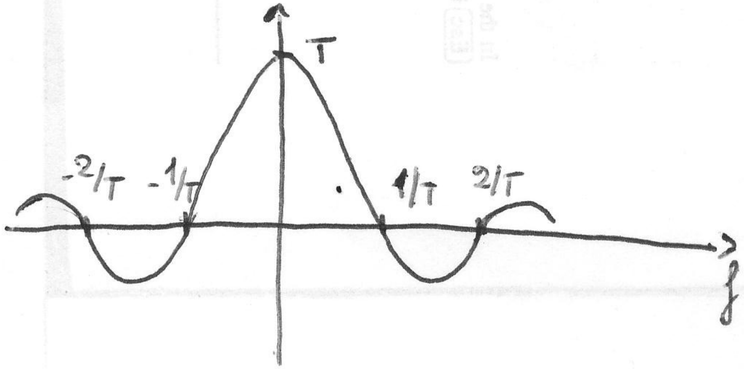
utilizzando la trasformata della δ di Dirac e la proprietà di trasl. frequenz.

$\boxed{4)\ \text{IMPULSO RETTANGOLARE}}$

DIM

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 & , -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$





$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{-j\omega} = \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} =$$

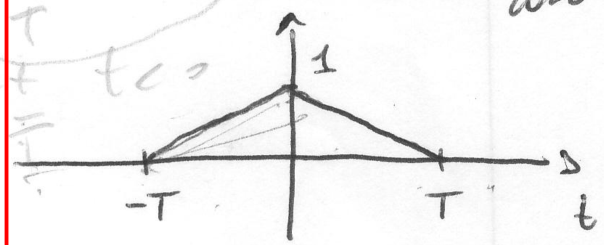
$$= \frac{2}{\omega} \sin(\omega T/2) = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = \boxed{T \cdot \text{sinc}(\omega T/2) = T \cdot \text{sinc}(\pi f T)}$$

Con $\text{Sinc}(x) \triangleq \text{Sa}(x) \triangleq \frac{\sin x}{x}$

5) IMPULSO TRIANGOLARE

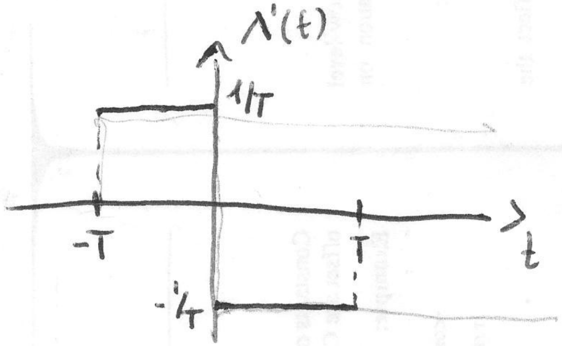
$$g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & -T \le t \le T \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

2010



Calcolando la derivata si ha:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \begin{cases} -1/T & 0 < t < T \\ 1/T & -T < t < 0 \\ 0 & |t| > T \end{cases} = \boxed{\frac{1}{T}\left[u(t+T)\right] - \frac{2}{T}u(t) + \frac{1}{T}\left[u(t-T)\right]}$$



derivando ulteriormente:

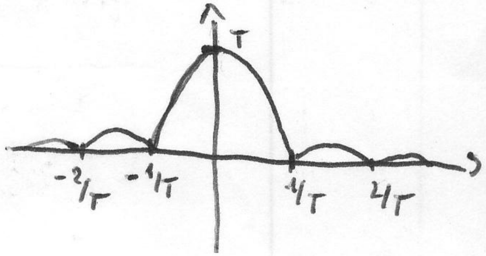
$$\boxed{\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{1}{T}\delta(t+T) - \frac{2}{T}\delta(t) + \frac{1}{T}\delta(t-T)}$$

la cui trasformata è:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} : \boxed{\frac{1}{T} e^{j\omega T} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T} e^{-j\omega T} = \frac{1}{T}\left(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}\right)^2} =$$

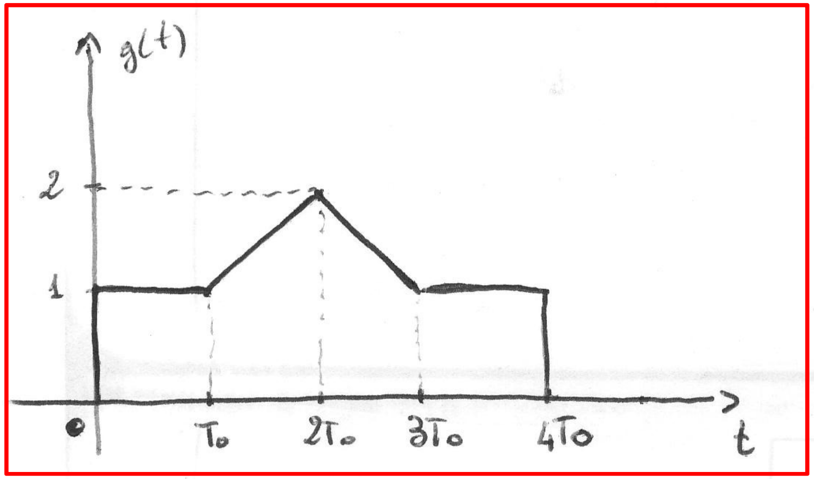
$= -\frac{4}{T}(\sin \pi f T)^2$ da cui, applicando due volte la proprietà di integrazione:

$$\boxed{g(t) \longleftrightarrow -\frac{4}{T}\frac{(\sin \pi f T)^2}{(j 2\pi f)^2}} = \boxed{T \,\mathrm{sinc}^2(\pi f T)}$$

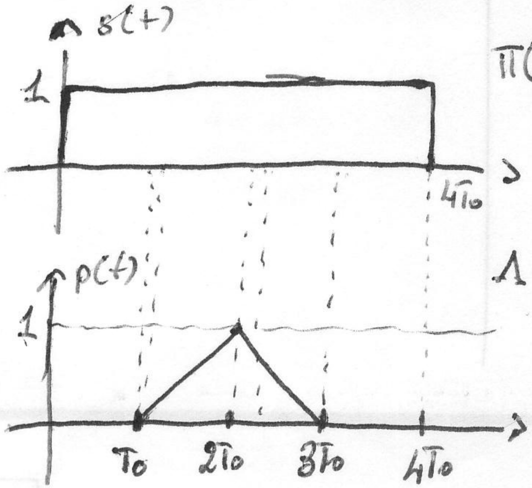


7) ESERCIZIO : 2010

Dato il segnale $g(t)$ come in figura, calcolarne lo spettro:



$\Rightarrow$



$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} T \cdot \text{Sinc}(\pi f T)$

$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} T \cdot \text{Sinc}^2(\pi f T)$

Possiamo immaginare $\boxed{g(t) = s(t) + p(t)}$: $s(t)$ è un impulso rettangolare di ampiezza unitaria, di durata $4T_0$ e traslato di $2T_0$, cioè $s(t) = \Pi\left(\frac{t-2T_0}{4T_0}\right)$, mentre $p(t)$ rappresenta un impulso triangolare di ampiezza unitaria, di durata $2T_0$ e traslato di $2T_0$, ovvero $p(t) = \Lambda\left(\frac{t-2T_0}{T_0}\right)$. La trasformata può essere facilmente valutata ricorrendo alle proprietà di linearità e di traslazione temporale, per cui:

$$w(t - T_d) \xrightarrow{\mathcal{F}} W(f)e^{-j\omega T_d}$$

$$S(f) = 4T_0 \, \text{Sinc}(4\pi f T_0)\, e^{-j\omega 2T_0} \quad e \quad P(f) = T_0 \, \text{Sinc}^2(\pi f T_0)\, e^{-j\omega 2 T_0}$$

per cui:

$$W(f) = \underbrace{\left[4T_0 \, \text{Sinc}(4\pi f T_0) + T_0 \, \text{Sinc}^2(\pi f T_0)\right]}_{\text{spettro delle ampiezze}} e^{-j \underbrace{4\pi f T_0}_{\text{fase}}}$$

```
%in Hertz (Hz)
fsample=44.1e3;
durata = 20;
numCampioni=durata*fsample;
%lettura da file (estrazione di numCampioni dal file audio)
xs=wavread('ondasinK300700Hz.wav',numCampioni);
%da stereo otteniamo il mono (sx channel)
%xms=(x(:,1)); %remmato perchè è gia segnale monofonico
xms=xs;
%fft length
fftlength=2^(nextpow2(numCampioni/30));
X=(fft(xms,fftlength));
%X=(fft(xms,fftlength));
X1=[X(1:fftlength/2) X(fftlength/2+1:fftlength)];
%plot(abs(X1));
plot(abs(X1(:,1)));
```