

Teoria dell'Informazione e Applicazioni – a.a. 2015-2016

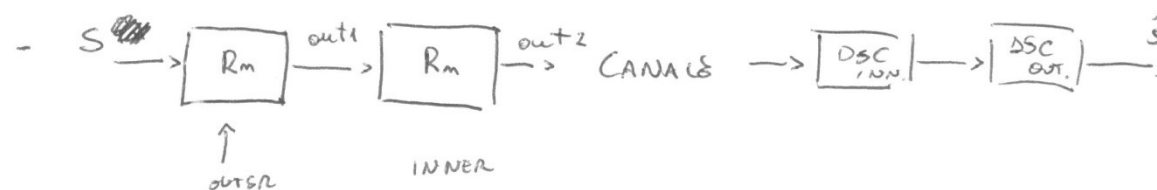
Esercizi su **Codifica** dei segnali (cod. concatenati e confronti)

15-10-2015
Ing. P. Fazio

CONCATENAZIONE DI CODICI

(5)

- COSTRUIRE CODICI LUNGI PARTENDO DA CODICI CORTI (PIÙ FACILE DA IMPLEMENTARE)
- CODIFICA PIÙ SEMPLICE E MINORI COMPLESSITÀ RISPETTO ALL'EQUIVALENTE



$S = 01101$ R_5^2

out₁ 0000 1111 1111 0000 1111

out₂ 0---0 1---1 1---1 0---0 1---1

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{25}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{25}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{25}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{25}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{25}$

$\alpha = 0,1$

→ ottimizzare ancora la formula semplificata (leading order)

$$P_e^1(3,5) = \binom{5}{3} \alpha^3 = \frac{5!}{3!2!} \alpha^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} \alpha^3 = 10 \alpha^3 = 10 \cdot (0,001) = 0,01 = 10^{-2}$$

$$P_e^2(3,5) = \binom{5}{3} (0,01)^3 = 10 \cdot (0,01)^3 = \boxed{10^{-5}}$$

NSL CASO DI COMPLICAZIONE R_{25}

$$P_e(13,25) = \binom{25}{13} \alpha^{13} = \frac{25!}{13!12!} = \boxed{5,2 \cdot 10^{-7}}$$

MORE ROBUST

COMPARISON!

ES. PER CASO)

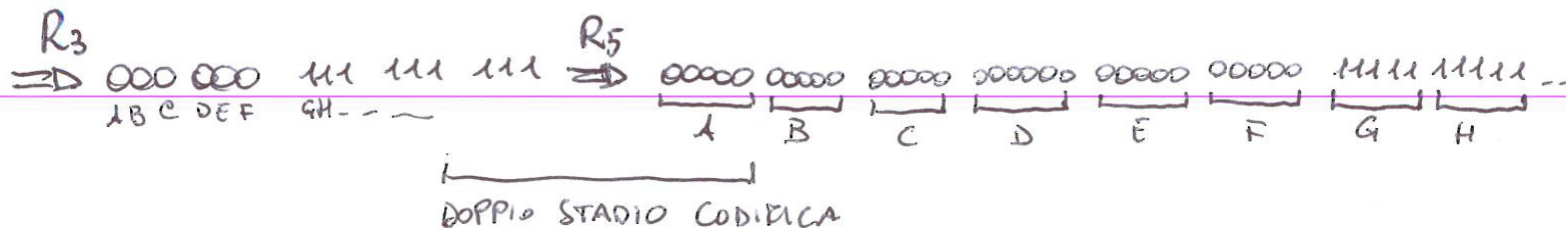
VALUTARE P_e CON R_3^2 o R_9 , EFFETTUARE IL CONFRONTO

ESEMPIO)

(11)

1.a) CODIFICARE CON CODICE R_3-R_5 LA PAROLA DI INFORMAZIONE:

$$p = [00\ 111]$$



1.b) STABILIRE SE SI TRASMETTE IN MANIERA EFFICIENTE TRAMITE R_3-R_5 CON $\alpha = 10^{-20}$

I STADIO) $P_e(R_3) = P_e(2,3) = \binom{3}{2} \alpha^2 (1-\alpha) \stackrel{\text{linea}}{\approx} \frac{3!}{2!} (\alpha^2 - \alpha^3) \approx 3\alpha^2 = 3(10^{-20})^2 = 3 \cdot 10^{-40}$

II STADIO) $P_e(R_5) = P_e(3,5) = \binom{5}{3} \alpha^3 (1-\alpha)^2 \approx \frac{5!}{2!3!} 10\alpha^3 \leftarrow \alpha = 3 \cdot 10^{-40}$

SENZA SOSTITUIRE IL VALORE DI α AVBIATO, PIU' IN GENERALE:

$$P_e(R_3-R_5)_T = 3\alpha^2 \Big|_{\alpha=P_e(R_5)} = 3(10\alpha^3)^2 = 300\alpha^6$$

PIU' SI TRASMETTE IN MANIERA EFFICIENTE SE $300\alpha^6 \leq 10^{-20}$, CIOE' SE SI RIESCONO A MIGLIORARE LE PERFORMANCE DEL CANALE

$$\alpha \leq \sqrt[6]{\frac{10^{-20}}{300}}$$

1.e) CONFRONTO CON R_{15} :

$$P_e(R_{15}) = P_e(8, 15) = \binom{15}{8} d^8 (1-d)^7 \approx \binom{15}{8} d^8 = \frac{15!}{8! 7!} d^8 =$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} d^8 = \frac{154440}{24} d^8 \approx 6435 d^8, \text{ DATO CHE } 0 < d < 1$$

$$6435 d^8 < 300 d^6 \quad (\text{NON SAREBBE SEMPLIFICATO PER } \alpha > 0,20, \text{ MA È UN VALORE INCONGRUO})$$

R_{15} È PIÙ UNVIAGGIO SO INTENZIONI DI P_e , PIÙ MARGINE DI BUFFER PIÙ LONGHI PER MEMORIZZARE 15 BIT, AL RISCO DI 3+5

1.f) VALUTARE UNA ^{POSSIBILE} CODIFICA CONCATENATA CHE POSSA RAPPRESENTARE UN BUON TRADE-OFF TRA NUMERO DI STADI, SPAZIO OCCUPATO, PROB. DI ERRORE, CON $P_b = 10^{-9}$ E $\alpha = 0,001$

PROVARE CON:

$$-R_3 \rightarrow P_b(R_3) \approx 3d^2 = 3(0,001)^2 = 3 \cdot (10^{-3})^2 = 3 \cdot 10^{-6} > 10^{-9} \text{ NO!}$$

$$-R_5 \rightarrow P_b(R_5) \approx 10d^3 = 10(10^{-3})^3 = 10 \cdot 10^{-9} = 10^{-8} > 10^{-9} \text{ NO!}$$

$$-R_7 \rightarrow P_b(R_7) \approx \binom{7}{4} d^4 (1-d)^3 \approx \binom{7}{4} d^4 = \frac{7!}{4! 3!} d^4 = 35 (10^{-3})^4 = 35 \cdot 10^{-12} \text{ OK!}$$

(12)

$$\begin{aligned}
 P_e(R_5 - R_5 - R_5) &= 10 \alpha^3 \Big|_{\alpha=\beta} \Big|_{\beta=P_e(R_5)} = 10 \cdot (10(10\alpha^3)^3)^3 = \\
 &= 10 (10 \cdot (10.000 \alpha^9)^3) = 10 (1000 \cdot 1000^3 \alpha^{27}) \\
 &= 10 \cdot 1000^4 \alpha^{27} = 10 (10^3)^4 \alpha^{27} = \\
 &= 10 \cdot 10^{12} \alpha^{27} = 10^{13} \alpha^{27} = \\
 &= 10^{13} (10^{-1})^{27} = 10^{13} \cdot 10^{-27} = 10^{-14}
 \end{aligned}$$

$$\text{MA } 10^{-14} > 10^{-15}$$

QUINDI NON SI PUO' TRASMETT
RE CORRETTAMENTE

2c) IPOTIZZANDO UN RITARDO MASSIMO SUPPORTATO ALLA FINE DELLA CATENA DI CODIFICA DI 14ms E UN RITARDO DI SINGOLO STADIO DI 5ms, SI SODDISFA LA SPECIFICA?

(13)

$$3 \times 5 \times 10^{-3} s = 15 \times 10^{-3} s > 14 \times 10^{-3} s$$

QUALE SCHEMA SI PUO' CONSIDERARE PER RISPETTARE IL VINCOLO SULL'ESPRONT
E SUL RITARDO? LO SI PROGETTA CONSIDERANDO UN TRADE-OFF TRA NUMERO DI STADI
E RITARDO DI CODIFICA.

SICURAMENTE DOVRA' AVERE 1 O 2 STADI DI CODIFICA (~~IL~~ RITARDO = $10 \times 10^{-3} s$)

$$\text{— PROVA } R_3 - R_3 \Rightarrow P_e(R_3^2) = 3(3\alpha^2)^2 = 27\alpha^4 = 27 \cdot (10^{-1})^4 = 27 \cdot 10^{-4} \text{ NO!}$$

$$\text{— PROVA } R_5 - R_5 \Rightarrow P_e(R_5 - R_5) = 10(10\alpha^3)^3 = 10.000 \cdot \alpha^9 = 10000 \times 10^{-9} = 10^{-5} \text{ SI}$$

$$\text{— PROVA } R_5 - R_7 \Rightarrow P_e(R_5 \cdot R_7) = 10(35\alpha^4)^3 = 428750\alpha^{12} \approx 42 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{— PROVA } R_7 - R_7 \Rightarrow P_e(R_7 - R_7) = 35(35\alpha^4)^4 = 35^5 \cdot \alpha^{16} = 3.5^5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-16} = 3.5^5 \cdot 10^{-11} \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

$$\text{— PROVA } R_7 - R_9 \Rightarrow P_e(R_9) = \binom{9}{5} \alpha^5 (1-\alpha)^4 \approx \frac{9!}{5!4!} \alpha^5 = 126\alpha^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_e(R_7 - R_9) = 35(126\alpha^5)^4 \approx 4 \cdot 10^{-11} \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

$$\text{— PROVA } R_9 - R_9 \Rightarrow P_e(R_9^2) = 126(126\alpha^5)^5 = 126^6 \alpha^{25} \approx 4 \times 10^{12} \cdot 10^{-25} \approx 4 \times 10^{-13} \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

$$\text{— PROVA } R_{11} - R_{11} \Rightarrow P(R_{11}) = \binom{11}{6} \alpha^6 (1-\alpha)^5 \approx \frac{11!}{6!5!} \alpha^6 = 462\alpha^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_e(R_{11} - R_{11}) = 462(462\alpha^6)^6 = 462^7 \cdot \alpha^{36} \approx 4.6 \times 10^{18} \cdot 10^{-36} = 4.6 \times 10^{-18} \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

POR CASA) VERIFICAR SE POR $\alpha = 0.01$
